# MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
FAZEKAS FERENC

## C. III.
## INTEGRÁLEGYENLETEK

ÍRTA:
DR. FENYŐ ISTVÁN

MÁSODIK KIADÁS



TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1966

# MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:

DR. FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS

★

BELSŐ MUNKATÁRSAK:

DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS

DR. BAJCSAY PÁL
EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS

SZEMLÉLTETÉS:
GYURCSY ENDRE
OKL. VILLAMOSMÉRNÖK



TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1966

A
# MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK
SOROZAT KÖTETEI

## A.

A. I. Középiskolai matematika (Negyedik kiadás)
A. II. Egyváltozós elemi függvények (Második kiadás)
A. III. Differenciálszámítás (Második kiadás)
A. IV. Határozatlan integrál (Harmadik kiadás)
A. V.* Határozott integrál (Első rész) (Második kiadás)
A. V.** Határozott integrál (Második rész)
A. VI. Többváltozós függvények és differenciálásuk (Második kiadás)
A. VII. Többváltozós függvények integrálása (Második kiadás)
A. VIII. Taylor-sorok (Harmadik kiadás)
A. IX. Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek (Harmadik kiadás)
A. X.* A logarléc (Negyedik kiadás)

## B.

B. I-II-III. Vektoranalízis (Térgörbék és felületek differenciálgeometriája. Skalár-, vektor- és tenzormezők( (Harmadik kiadás)
B. IV. Komplex függvénytan (Harmadik kiadás)
B. V. Numerikus és grafikus közelítő módszerek (Második kiadás)
B. VI. Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok
B. VII.* Közönséges differenciálegyenletek (Harmadik kiadás)
B. VII.** Közönséges differenciálegyenletek (Második rész)
B. VIII. Parciális differenciálegyenletek

## C.

C. I. Operátorszámítás. Speciális függvények
C. II. Variációszámítás
C. III. Integrálegyenletek
C. IV. Mátrixszámítás
C. V. Valószínűségszámítás
C. VI. Matematikai összefoglaló (Második kiadás)
C. VII. Matematikai programozás (Második kiadás)

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk.)

C. III.

# INTEGRÁLEGYENLETEK

ÍRTA:

DR. FENYŐ ISTVÁN

EGYETEMI TANÁR

A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

*Második kiadás*

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

E KÖTET KÉZIRATÁT ÁTNÉZTE:

FREUD GÉZA
a matematikai tudományok
doktora

DR. FREY TAMÁS
kandidátus, egyetemi docens



A kötet ábráit készítette:
ÁRKOS ILONA



KIADÁSÁT
A MŰVELŐDÉSÜGYI MINISZTER
RENDELTE EL

# A KÖTET TARTALOMJEGYZÉKE

# A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy, a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2—3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter—Kuzmin* időközben magyarul megjelent kíváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt — magas színvonalára való tekintettel — elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták — a legmeggyőzőbben *dr. Alexits* akadémikus, professzor —, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott, műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő alkalmazott, műszaki anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy Műszaki Matematikai Gyakorlatok című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével — egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédjének közreműködését.

*Munkánk A.* és *B.* része* jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott kerethez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat *C.* része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása műszaki felsőoktatásunkban az utóbbi években megkezdődött.

*Munkánk első célja* a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

*Munkánk második* (de nem mellékes) *célja* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket kívánt.* Ennek megfelelően nem szorítkoztunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredményeik közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú gyakorló feladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. E szerkesztési elvek legtapasztaltabb professzoraink helyeslésével találkoztak, továbbá egészen új szovjet példatárakban észleltünk többé-kevésbé hasonló szerkesztési elveket. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült a rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltértünk.

Az *A. rész füzeteiben,* professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

A *B.* és *C. rész füzeteiben* — az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismere-

* A sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 2. oldalon

teire támaszkodva — nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematikai legkülönbözőbb területeiről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

Közismert tény, hogy a híressé vált külföldi példatárak legtöbbje évtizedek alatt számos kiadás folyamán forrt ki, tökéletesedett. E viszonylag újszerű célkitűzésekkel készülő példatár fiatal szerzői tehát érthetően sok-sok *észrevételt*, megjegyzést, tanácsot várnak és kérnek ezúton is az olvasóktól, hogy a sorozat kitűzött céljának minél hamarabb és minél teljesebb mértékben megfeleljen.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb *forrásokból*, sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem — példatárnál amúgy is szegényes sikert ígérő — eredetiségre. Természetesen szép számú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása Gyurcsy Endre okl. villamosmérnök kollégа érdeme.

E sorozat megszületését megkönnyítette az a körülmény, hogy a minisztérium egyetemi tankönyvosztálya egy ilyen mű szükségességét, jelentőségét és elvi vonatkozásait igen világosan látta, és másokkal is meg tudta értetni.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus, professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről*, mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Köszönettel tartozom a *Tankönyvkiadó Vállalatnak*, különösképpen a *műszaki szerkesztőségnek*, amely értékes segítséget nyújtott nekünk e nyomdailag nagy követelményeket támasztó sorozat műszaki munkálataival kapcsolatban.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink tanszemélyzetének és hallgatóinak ajánljuk*. Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1962. szeptember 1. A SZERKESZTŐ

## ELŐSZÓ A SOROZAT MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Közel nyolc év munkájával — néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve az eredeti terv szerint — sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot 23 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekinthetjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak. Ez év nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi Nemzetközi Mérnöki Matematikai kongresszus* vezetősége kiállította és idegen nyelvű vetített képes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot, figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

Most, a második kiadás során a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének — a megalkotásánál semmivel sem könnyebb — munkája vár ránk. Természetesen az első kiadás munkálatai során szerzett gazdag tapasztalataink, az újabb hazai és külföldi szakirodalom tanulmányozása, továbbá a könyveinkből kapott hazai és külföldi észrevételek jelentős segítségünkre lesznek. Remélhetőleg módunk lesz a műszaki matematikának néhány újabb diszciplínáját is feldolgozni a sorozatban.

Amikor munkaközösségünk változatlan céltudatosságáról és munkakedvéről biztosíthatom a magyar műszaki matematika híveit, egyben ismét kérem bírálóink, olvasóink, valamint a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* további szakmai, erkölcsi és anyagi támogatását, nemkülönben az *Egyetemi Nyomda* ismert színvonalú munkáját.

Budapest, 1958. szeptember 1. A SZERKESZTŐ

## ELŐSZÓ A SOROZAT HARMADIK KIADÁSÁHOZ

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása, a második kiadás lendületes folytatása mellett. A harmadik kiadás egyrészt olyan hagyományos, de széles körben érdekes tárgyú kötetekkel kezdődött meg, mint az A. I. és A. X. másrészt olyan modern alkalmazási területű és emiatt mindinkább keresetté vált kötetekkel, mint az A. IX., B. IV.

Az utóbbi második kiadások fél éven belüli elfogyása — éppen a matematikai programozás, lineáris algebrai segédeszközeivel, ill. a síkbeli rugalmasságtan korszerű, komplex függvénytani módszerével kapcsolatos bővítés után — kézzel foghatóan bizonyítja a sorozat második kiadásának előszavában kitűzött fejlesztési tervek és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítések helyességét.

E körülmény buzdítás a munkaközösségünk részére és megnyugtatás a Kiadó számára is, látván, hogy újabb áldozatai hasznos célt és reális igényeket szolgálnak.

Említésre méltó, hogy sorozatunk vagy egyes kötetei 1958-óta újabb külországban (pl. a Szovjetúnióban, NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban, USA-ban, Angliában, NSZK-ban) és nemzetközi fórumon (pl. az NDK Matematikai Társulatának 1963. évi nemzetközi ülésszakán) tudtak helytállni, és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének nagy munkáját, ismét kérve ehhez a *Minisztérium, a Tankönyvkiadó* és nem utolsósorban műszaki olvasótáborunk buzdító, áldozatkész támogatását.

Budapest, 1964 febr. 15. A SZERKESZTŐ

## ELŐSZÓ E KÖTETHEZ

E könyv azoknak szól, akik az integrálegyenletek elméletét már némiképpen ismerik, és feladatok kidolgozása során kívánnak kellő gyakorlatot szerezni az integrálegyenletekkel való bánásban. Nem tankönyv tehát, és nem is célja a tankönyvet pótolni. Az elméleti összefoglalók csupán emlékeztetőül és a használt kifejezések magyarázatára szolgálnak.

Írásnál a fő nehézséget a rendkívül szűkre szabott terjedelem okozta. Emiatt teljességre nem is gondolhattam, és ugyancsak a szűk keretek miatt voltam kénytelen helyenként a megoldásokat is inkább csak vázolni, mint részletesen kidolgozva közölni. Több helyütt heurisztikus jellegű megoldásmódok szerepelnek, a teljesen precíz kidolgozást — a közölt gondolatmenet alapján — a kellően gyakorolt olvasó maga is elvégezheti.

A könyv jellege és rendeltetése miatt szöveg közötti hivatkozások nincsenek, a részletek iránt érdeklődőknek a könyv végén megtalálható irodalomjegyzéket ajánlom.

Hálás köszönetemet fejezem ki Frey Tamás és Freud Géza kollégáimnak, akik lektori véleményükben igen sok értékes megjegyzésükkel segítettek munkámban. E helyen is megköszönöm Árkos Ilona egyetemi tanársegéd fáradozását, aki több feladat numerikus megoldását végezte, és aki az ábrákat volt szíves megrajzolni.

Budapest, 1957. ápr. 15. A szerző

# I. RÉSZ. INTEGRÁLEGYENLETEK ELMÉLETE

## 1.1. Az integrálegyenlet fogalma, integrálegyenletek fajai

Lineáris integrálegyenleten a következő alakú függvényegyenletet értjük:

$$a\,\varphi(P) + \int_{\Omega} K(P, Q)\,\varphi(Q)\,d\Omega_Q = f(P). \tag{1.1.1}$$

$\varphi(P)$ jelenti az ismeretlen függvényt, $K(P, Q)$ és $f(P)$ adott függvények, $a$ pedig valós vagy komplex szám. $P$ és $Q$ jelentik az $\Omega$ integrációs tartomány pontjait. Ez utóbbi lehet véges, de lehet a végtelenbe nyúló is. A $K(P, Q)$ függvényt az integrálegyenlet *magjának*, az $f(P)$ függvényt sokszor *zavaró függvénynek* vagy zavarótagnak hívjuk. Ha az utóbbi $\equiv 0$, akkor *homogén*, ha $f(P) \not\equiv 0$, *inhomogén* integrálegyenlettel van dolgunk.

Ha $a = 0$, akkor *elsőfajú* az integrálegyenlet. Elsőfajú lineáris integrálegyenlet általános alakja tehát:

$$\int_{\Omega} K(P, Q)\,\varphi(Q)\,d\Omega_Q = f(P). \tag{1.1.2}$$

Ha $a \neq 0$, akkor az integrálegyenletet *másodfajúnak* hívjuk. (1.1.1)-nek $a$-val való osztása és a $\lambda = -\dfrac{1}{a}$ jelölés bevezetése révén a

$$\varphi(P) - \lambda \int_{\Omega} K(P, Q)\varphi(Q)\,d\Omega_Q = F(P) \tag{1.1.3}$$

alakú egyenletre jutunk, melyet a másodfajú integrálegyenlet normál alakjának fogunk tekinteni. A $\lambda$ együtthatót az integrálegyenlet paraméterének nevezzük.

Az integráljel jelenthet persze közönséges RIEMANN integrált vagy improprius RIEMANN integrált, de adott esetben lehet LEBESGUE-integrál vagy CAUCHY-féle főérték is. Megoldáson olyan, előírt függvény-klasszisba tartozó függvényt értünk, mely mellett az egyenlet bal oldalán szereplő integrál létezik, és amelyet az egyenlet bal oldalába helyettesítve, megadja a jobb oldali függvényt. (Hogy két függvényt mikor tekintünk egyenlőnek, az a függvényklasszistól és az integrál értelmezésétől függ. Ha pl. a függvényklasszis az $L^2$ tér, akkor két függvény azonos, ha azok legfeljebb egy 0 mértékű halmazon különböznek.)

$\lambda$ azon értékeit, mely mellett az (1.1.3) egyenletnek *bármely*, az integráljel értelme által legtöbbször meghatározott függvényklasszisba tartozó, $F(P)$ mellett van *egyértelmű* megoldása, a $K(P, Q)$ mag *reguláris értékének* hívjuk. $\lambda$ azon értékeit pedig, mely mellett az (1.1.3) alakú *homogén* egyenletnek van a

$$\int_{\Omega} \varphi^2(p)\,d\Omega_p = 1 \tag{1.1.4}$$

feltételt kielégítő megoldása, a $K(P, Q)$ mag *sajátértékének* nevezzük. A homogén egyenlet (1.1.4) feltételt kielégítő megoldását *sajátfüggvénynek* hívjuk. Világos dolog, hogy ugyanazon $\lambda$-hoz tartozó sajátfüggvények bármely lineáris kombinációja ismét a másodfajú homogén integrálegyenlet megoldását szolgáltatja.

A jövőben a rövidség kedvéért az alábbi jelöléseket fogjuk használni: az identitás operátorát jelöljük $\mathcal{E}$-vel. Ezen azt a műveletet értjük, mely valamely függvényklasszis bármely függvényét önmagába viszi át:

$$\mathcal{E}\varphi = \varphi. \tag{1.1.5}$$

A $K$ mag szintén definiál egy operátort, melyet $\mathcal{K}$-val fogunk jelölni. Ennek hatása valamely $\varphi$ függvényre:

$$g(P) = \mathcal{K}\varphi = \int_{\Omega} K(P, Q)\, \varphi(Q)\, d\Omega_Q. \tag{1.1.6}$$

Az (1.1.5) és (1.1.6) operátorok — melyek a függvények valamely osztályára értelmezettek — az alábbi tulajdonsággal rendelkeznek:

1°. Additívok:

$$\mathcal{K}(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathcal{K}\varphi_1 + \mathcal{K}\varphi_2$$

2°. Homogének:

$$c\,\mathcal{K}\varphi = \mathcal{K}c\,\varphi,$$

$c$ tetszőleges számot jelent. Ezekkel a tulajdonságokkal rendelkező operátort *lineárisnak* hívjuk.

Az (1.1.6) alatti operátort egy, az $\Omega\times\Omega$ tartományban definiált mag létesíti. Az ilyen operátort *integráloperátornak* hívjuk. Nem minden 1° és 2° tulajdonságokkal bíró lineáris operátor integráloperátor. Ha például a szóban forgó függvényklasszis az $L^2$ tér (négyzetükkel együtt Lebesgue integrálható függvények tere), $\Omega = [0, 1]$, akkor — mint ismeretes — ebben a térben (1.1.5) alatt definiált $\mathcal{E}$ operátor nem integráloperátor.

Az operátorjelöléssel az (1.1.2) egyenlet így írható:

$$\mathcal{K}\varphi = f, \tag{1.1.7}$$

(1.1.3) pedig egyszerűbben a következő módon:

$$\varphi - \lambda\mathcal{K}\varphi = F. \tag{1.1.8}$$

Hasznos lesz két, $\mathcal{T}_1$ és $\mathcal{T}_2$ lineáris operátor lineáris kombinációjáról beszélni:

$$a_1\mathcal{T}_1 + a_2\mathcal{T}_2$$

jelentse azt az operátort, melynek hatása a $\varphi$ függvényre a következő:

$$(a_1\mathcal{T}_1 + a_2\mathcal{T}_2)\,\varphi = a_1\mathcal{T}_1\varphi + a_2\mathcal{T}_2\varphi$$

($a_1$ és $a_2$ tetszőleges valós vagy komplex számok). Ennek felhasználásával (1.1.8) még egyszerűbben így írható:

$$(\mathcal{E} - \lambda\mathcal{K})\,\varphi = F. \tag{1.1.9}$$

Ha $\lambda$ a $\mathcal{K}$ operátornak reguláris értéke, akkor (1.1.9) egyenlet $\varphi$-t egyértelműen definiálja $F$ segítségével, vagyis (1.1.9) megoldása $F$-et $\varphi$-be viszi át, ez tehát egy új operátort, $\mathcal{E} - \lambda\mathcal{K}$ inverz operátorát definiálja. Jelöljük ezt $(\mathcal{E} - \lambda\mathcal{K})^{-1}$-nel; e jelöléssel (1.1.9) megoldása:

$$\varphi = (\mathcal{E} - \lambda\mathcal{K})^{-1}F.$$

Ha $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ lineáris operátorok és $\mathcal{K}\varphi$ az $\mathcal{L}$ értelmezési tartományába esik, akkor

$$\mathcal{L}(\mathcal{K}\varphi) = \mathcal{L}\mathcal{K}\varphi$$

egy újabb operátort definiál, ezt $\mathcal{L}$ és $\mathcal{K}$ szorzatoperátornak hívjuk. Ez a szorzat általában nem kommutatív. Példa: $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ legyenek a $K(x, y) = xy$ és $L(x, y) = x^2y$ magok által generált integráloperátorok. Ha például $\varphi(x) \equiv 1$, akkor

$$\mathcal{L}(\mathcal{K}\,\varphi) = \int_0^1 z^2 \left(x \int_0^1 xy\, dy\right) dx = \frac{z^2}{6} \quad \text{és} \quad \mathcal{K}(\mathcal{L}\varphi) = \int_0^1 z \left(x \int_0^1 x^2 y\, dy\right) dx = \frac{z}{8}.$$

Ha $\mathcal{T}$ egyértelmű inverze létezik, és ezt $\mathcal{T}^{-1}$-nel jelöljük, akkor

$$\mathcal{T}\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T} = \mathcal{E}.$$

Két valós függvény belső szorzatán az

$$(f, g) = (g, f) = \int_\Omega f(P)\, g(P)\, d\Omega_P$$

számot értjük. Valamely $f(P)$ függvény normáján az

$$\| f \| = (f, f)^{1/2} = \left(\int_\Omega f^2(P)\, d\Omega_P\right)^{\frac{1}{2}}$$

mennyiséget értjük (a négyzetgyök pozitív előjellel veendő).

$n$ darab, adott sorrendben megadott valós függvény egy függvényvektort alkot: $u(P) = [u_1(P), u_2(P), \ldots, u_n(P)]$. Adott skalár $f(P)$ függvénynek az $u(P)$ vektorfüggvénynyel alkotott belső szorzatán az

$$(\boldsymbol{u}, f) = [(u_1, f), (u_2, f), \ldots, (u_n, f)]$$

(állandó komponensekkel bíró) vektort értjük.

Két vektorfüggvény $\boldsymbol{u}(P)$ és $\boldsymbol{v}(P)$ diadikus szorzata az alábbi mátrix:

$$[\boldsymbol{u}(P), \boldsymbol{v}(P)] = [\boldsymbol{v}(P), \boldsymbol{u}(P)] = \begin{bmatrix} (u_1, v_1) \ldots (u_1, v_n) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (u_n, v_1) \ldots (u_n, v_n) \end{bmatrix},$$

amelynek komponensei állandók. Skalárszorzatukon pedig az $\boldsymbol{u}(P)\,\boldsymbol{v}(P) = u_1(P)\, v_1(P) + \ldots + u_n(P)\, v_n(P)$ kifejezést fogjuk érteni — ez tehát függvény. Hasonlóképpen képezzük a belső szorzatát két olyan $\boldsymbol{u}(P)$ és $\boldsymbol{v}(P)$ vektorfüggvénynek, melyeknek különböző független változójuk van:

$$\boldsymbol{u}(P)\,\boldsymbol{v}(Q) = u_1(P)\, v_1(Q) + u_2(P)\, v_2(Q) + \ldots + u_n(P)\, v_n(Q).$$

Megemlítjük, hogy valamely $\boldsymbol{u}(P)$ vektorfüggvénynek egy $\boldsymbol{v}$ közönséges vektorral való skalárszorzatán az

$$\boldsymbol{u}(P)\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i\, u_i\, (P)$$

kifejezést értjük.*

Az általános szokásnak megfelelően az $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ mátrix inverzét (ha ilyen létezik) $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]^{-1}$ jellel fogjuk jelölni, és az $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ mátrixnak valamely $\boldsymbol{p}$ vektorral képezett szorzatán a szokásos sor-oszlop kombinációval definiált vektort értjük, ha a $\boldsymbol{p}$ vektort oszlopvektornak fogjuk fel.

Valamely négyzetes $\boldsymbol{A}$ mátrix determinánsát az $| \boldsymbol{A} |$ jellel fogjuk jelölni.

* Megjegyezzük, hogy ez az előbbi speciális esete, midőn a $v_i(Q)$ függvények állandók.

*Feladatok*

1101.
$$\int_0^1 \int_0^1 K^2(x, y)\, dx\, dy$$
létezik. Bizonyítsuk be a $K$ mag által $L^2(0, 1)$-n definiált $\mathcal{K}$ operátor alábbi tulajdonságát:
$$\| \mathcal{K} \varphi \| \leqq M \| \varphi \|,$$
ahol $M > 0$ állandó, független $\varphi \in L^2(0, 1)$-től.

1102. Bizonyítsuk be, hogy az 1101. alatt definiált operátor folytonos, azaz ha a $\varphi_n(x) \in L^2(0, 1)$ függvénysorozat olyan, hogy $\lim_{n \to \infty} \| \varphi_n \| = 0$, akkor
$$\lim_{n \to \infty} \| \mathcal{K} \varphi_n \| = 0.$$

1103. Igazoljuk, hogy $\mathcal{E}$ minden operátorral való szorzata kommutatív.

1104. Igazoljuk az alábbi formulát:
$$(\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2)^{-1} = \mathcal{T}_2^{-1} \mathcal{T}_1^{-1}.$$

1105. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{K}$ lineáris, akkor $\mathcal{K}^{-1}$ is lineáris (ha létezik).

1106. Legyen $K(x, y) = x + y$ és $L(x, y) = xy$; $\Omega = [0, 1]$. Határozzuk meg a $\mathcal{K} \mathcal{L}$ és $\mathcal{L} \mathcal{K}$ operátorokat. Ezek is integráloperátorok?

1107. Az $\boldsymbol{u}(P)$ vektorfüggvény komponensei legyenek lineárisan függetlenek. Akkor az $[\boldsymbol{u}(P), \boldsymbol{u}(P)]$ mátrixnak van inverze. Igaz-e az állítás megfordítva is?

## 1.2. Integrálegyenletek megoldása algebrai egyenletrendszer segítségével.

*a)* **Elfajult magú integrálegyenletek** A
$$K(P, Q) = \sum_{i=1}^{n} a_i(P)\, b_i(Q) = \boldsymbol{a}(P)\, \boldsymbol{b}(Q) \tag{1.2.1}$$
alakú magot elfajult magnak szokták nevezni. A későbbiekben fel fogjuk tételezni, hogy az $a_i(P)$, és ugyanígy a $b_i(Q)$ függvények lineráisan függetlenek. E feltevés mellett az $n$ számot az elfajult mag *hosszúságának* hívjuk. Az (1.2.1) alakú maggal bíró integrálegyenletek megoldása mindig visszavezethető algebrai egyenletrendszer megoldására. Tekintsük az elsőfajú integrálegyenletet. A mag alakja miatt
$$\mathcal{K} \varphi = \int_{\Omega} \boldsymbol{a}(P)\, \boldsymbol{b}(Q)\, \varphi(Q)\, d\Omega_Q = \boldsymbol{a}(P) \cdot [\boldsymbol{b}(Q) \cdot \varphi(Q)] = f(P).$$
Ebből tehát következik, hogy az (1.2.2) megoldhatóságának szükséges feltétele, hogy
$$f(P) = \boldsymbol{l}\, \boldsymbol{a}(P) \tag{1.2.3}$$
alakú legyen.

Ha az egyenlet *inhomogén: $f(P) \not\equiv 0$*, akkor $\boldsymbol{l} \neq 0$, keressük a megoldást ez esetben
$$\varphi(P) = \boldsymbol{p}\, \boldsymbol{b}(P) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, b_i(Q) \tag{1.2.4}$$
alakban, ahol $\boldsymbol{p}$ egyelőre ismeretlen vektor. Ennek (1.2.2)-be való helyettesítése után az
$$\boldsymbol{a}(P)\, [\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}]\, \boldsymbol{p} = \boldsymbol{l}\, \boldsymbol{a}(P) = \boldsymbol{a}(P)\, \boldsymbol{l}$$

eredményre jutunk, amiből a

$$[\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}]\,\boldsymbol{p}=\boldsymbol{l}$$

egyenletet kapjuk. Feltevéseink miatt a $[\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}]$ mátrix reguláris (l. az 1107. feladatot), ezért

$$\boldsymbol{p}=[\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}]^{-1}\,\boldsymbol{l}.$$

1.2.4) alapján integrálegyenletünknek megoldása

$$\varphi(P)=[\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}]^{-1}\cdot\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{b}(P). \tag{1.2.5}$$

Vagyis (1.2.3) a megoldhatóságnak nemcsak szükséges, hanem elégséges feltétele is.

Ha az egyenlet *homogén,* akkor $f(P)\equiv 0$, ami csak úgy lehet, ha $\boldsymbol{l}=0$, azaz $[\boldsymbol{b}(Q)\,\varphi(Q)]=0$. Vagyis a homogén egyenletet kielégíti minden a $\boldsymbol{b}(Q)$ vektorra ortogonális függvény (melyre tehát $[b_i(Q)\,\varphi(Q)]=0,\ i=1,2,\dots,n$).

Hasonlóan kezelhetők a másodfajú integrálegyenletek is:

$$(\mathcal{E}-\lambda\,\mathcal{K})\,\varphi=f. \tag{1.2.6}$$

Ebből

$$\varphi=f+\lambda\,\mathcal{K}\,\varphi=f+\lambda\,\boldsymbol{a}(P)\cdot[\boldsymbol{b}(Q),\varphi(Q)]\,,$$

ami azt jelenti, hogy ha (1.2.6)-nak egyáltalában van megoldása, akkor az csak

$$\varphi(P)=f(P)+\lambda\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{a}(P) \tag{1.2.7}$$

alakú lehet. Ezt (1.2.6)-ba behelyettesítve, a

$$\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{a}-\lambda\,\boldsymbol{c}\cdot\mathcal{K}\,\boldsymbol{a}=\mathcal{K}f$$

egyenlet adódik, ami a következő módon is írható:

$$(\boldsymbol{a}-\lambda\,\mathcal{K}\,\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=\mathcal{K}f.$$

Figyelembe véve (1.2.1)-et, az

$$(\boldsymbol{a}-\lambda\,\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}])\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b},f)$$

összefüggést kapjuk. Az $\boldsymbol{a}$ komponensei lineárisan függetlenek lévén, ez utóbbi egyenlet azt jelenti, hogy

$$(\boldsymbol{I}-\lambda\,[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}])\,\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b},f) \tag{1.2.8}$$

ahol $\boldsymbol{I}$-vel az egységmátrixot jelöltük.

Itt két lényegesen különböző esetet kell megkülönböztetnünk:

1°. $\lambda$ olyan szám, mely mellett

$$|\,\boldsymbol{I}-\lambda\,[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]\,|\neq 0. \tag{1.2.9}$$

Ekkor $(\boldsymbol{I}-\lambda\,[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}])^{-1}$ létezik, és az (1.2.8) egyenletrendszernek egy és csakis egy megoldása van, bármilyen függvény legyen is az egyenlet jobb oldalán. Vagyis

$$\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{I}-\lambda\,[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}])^{-1}\,(\boldsymbol{b},f).$$

Ezt (1.2.7)-be helyettesítve, azt kapjuk, hogy egyenletünk egyetlen megoldása

$$\varphi(P)=f(P)+\lambda(\boldsymbol{I}-\lambda\,[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}])^{-1}\,(\boldsymbol{b},f)\cdot\boldsymbol{a}(P)=$$
$$=f(P)+\lambda\int_{\Omega}(\boldsymbol{I}-\lambda\,[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}])^{-1}\,\boldsymbol{b}(Q)\,\boldsymbol{a}(P)\,\varphi(Q)\,d\Omega_Q.$$

Az

$$R(P,Q;\lambda)=(\boldsymbol{I}-\lambda\,[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}])^{-1}\,\boldsymbol{b}(Q)\cdot\boldsymbol{a}(P) \tag{1.2.10}$$

mag szintén elfajult mag, mely a $P$ és $Q$ változókon kívül a $\lambda$ paraméterértéktől is függ, de független az $f(P)$ megválasztásától. Ezt a magot a $K(P, Q)$ mag *rezolvens magjának*, röviden *rezolvensének* hívjuk. Ha ez ismert, akkor (1.2.6) megoldása:

$$\varphi(P) = f(P) + \lambda \int_{\Omega} R(P, Q; \lambda) f(Q) \, d\Omega_Q. \tag{1.2.11}$$

Az $R$ magnak megfelelő integráloperátor legyen $\mathcal{R}_\lambda$, akkor (1.2.11) rövidebben így írható:

$$\varphi = f + \lambda \mathcal{R}_\lambda f = (\mathcal{E} + \lambda \mathcal{R}_\lambda) f. \tag{1.2.12}$$

Ez éppen azt jelenti, hogy

$$(\mathcal{E} - \lambda \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{E} + \lambda \mathcal{R}_\lambda. \tag{1.2.13}$$

Ez persze csak akkor igaz, ha (1.2.9) teljesül.

Az (1.2.10) alatti mag ilyen alakba is felírható:

$$R(P, Q; \lambda) = \frac{D(P, Q; \lambda)}{|\boldsymbol{I} - \lambda [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]|} = \frac{D(P, Q; \lambda)}{D(\lambda)}, \tag{1.2.14}$$

ahol

$$D(\lambda) = |\boldsymbol{I} - \lambda [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]|. \tag{1.2.15}$$

$D(P, Q; \lambda)$ és $D(\lambda)$ rögzített $P$ és $Q(\in \Omega)$ mellett $\lambda$ racionális egész függvényei. A $D(\lambda)$ függvényt a $K$ mag FREDHOLM-*féle determinánsának* nevezzük. (1.2.14)-ből látható, hogy $R(P, Q; \lambda)$ pólusai a $P$ és $Q$ helyvektortól függetlenek. Az (1.2.8) feltételnek eleget tevő $\lambda$ érték mellett (1.2.6)-nak egy és csakis egy megoldása van. Ezek a $\lambda$-k a $K$ mag reguláris értékei.

2°. Ha $\lambda$ olyan, melyre

$$|\boldsymbol{I} - \lambda [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]| = 0 \tag{1.2.16}$$

teljesül, akkor (1.2.8)-nak általában nincsen megoldása. Nem-triviális megoldása van viszont ennek az egyenletrendszernek, ha a jobb oldal 0. Ez azt jelenti, hogy az (1.2.6) alakú homogén egyenletnek van nem-triviális megoldása. Vagyis az (1.2.16) feltételt kielégítő $\lambda$ számok a $K$ mag sajátértékei.

Mivel az (1.2.16) $\lambda$-ban legfeljebb $n$-ed fokú egyenlet, azért $K$-nak legfeljebb $n$ különböző sajátértéke van. Minden $\lambda$ értékhez az (1.2.8) alakú homogén egyenletrendszernek véges sok lineárisan független megoldása tartozik. Tehát az (1.2.6) homogén integrálegyenletnek csak véges sok lineárisan független sajátfüggvénye létezik.

Megjegyezzük, hogy bizonyos körülmények között az (1.2.6) alakú inhomogén egyenlet az (1.2.16) feltétel mellett is megoldható, ha például az (1.2.8) egyenletrendszer homogén. Ez akkor következik be, ha az $f$ zavaró függvény ortogonális $\boldsymbol{b}$ összes komponensére.

(1.2.14)-ből és (1.2.15)-ből látható, hogy a $K$ mag sajátértékei azonosak az $R$ mag pólusaival.

## *Feladatok*

**1201.** Bizonyítsuk be, hogy ha az elsőfajú integrálegyenletnek van egy megoldása, végtelen sok is van. Állítsuk elő az általános megoldást!

**1202.** Igazoljuk, hogy ha a $K(P, Q) = \sum_{i=1}^{n} a_i(P)\, b_i(Q)$ magot létrehozó $a_i$ (vagy $b_i$) függvények lineárisan nem függetlenek egymástól, akkor $K(P, Q)$ $n$-nél kevesebb fenti alakú taggal is előállítható.

**1203.** Írjuk fel explicit módon a $\sum_{i=1}^{n} a_i(P)\, b_i(Q)$ mag rezolvens magjának számlálójában és nevezőjében szereplő determinánsokat!

*Útmutatás:* Vegyük figyelembe az (1.2.14) képletet. Alkalmazzuk egy reguláris mátrix inverzének képzési szabályát az (1.2.10) képletre.

1204. Bizonyítsuk be, hogy az (1.2.1) alakú mag minden sajátfüggvénye az $a_i$ függvények lineáris kombinációja!

1205. Ha

$$K(P, Q) = \boldsymbol{a}(P) \cdot \boldsymbol{a}(Q)$$

és az $a_i$ függvények valósak, akkor $K$-nak mindig van sajátértéke és ez valós. Igazoljuk ezt!

1206. Ha a (1.2.1) alakú magban $a_i$ és $b_i$ függvények lineárisan függetlenek, és a mag hosszúsága $n$, akkor $K$ különböző sajátértékeinek száma: $r \leqq n$.

1207. Bizonyítsuk be, hogy bármely

$$K(P, Q) = a_1(P)\, b_1(Q) + \ldots + a_n(P)\, b_n(Q)$$

alakú mag a

$$K(P, Q) = \varphi_1(P)\, \psi_1(Q) + \ldots + \varphi_m(P)\, \psi_m(Q)$$

ún. *redukált* alakra transzformálható, ahol

$$(\varphi_i, \psi_k) = 0, \quad \text{ha} \quad i < k.$$

*Útmutatás:* $\varphi_1$ a $K$-nak csak úgy lehet sajátfüggvénye, ha $(\varphi_1, \psi_k) = 0$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$.

1208. Írjuk fel egy redukált alakban (l. az **1207.** feladatot) adott elfajult mag FREDHOLM- féle determinánsát, és határozzuk meg sajátértékeit.

1209. Igazoljuk, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy rögzített $P$ és $Q$ mellett valamely elfajult mag rezolvense a végetlenben eltűnjék az, hogy a FREDHOLM-féle determináns pontosan $n$-ed fokú legyen ($n$ a mag hossza).

*Útmutatás:* Transzformáljuk a magot redukált alakra, és utána vizsgáljuk a rezolvenst.

1210. Bizonyítsuk be, hogy a $K(P, Q)$ és a $K^*(P, Q) = K(Q, P)$ magoknak a sajátértékei azonosak!

1211. Bizonyítsuk be, hogy a $K$ mag különböző sajátértékeihez tartozó sajátfüggvények lineárisan függetlenek.

*Útmutatás:* Tegyük fel az állítás ellenkezőjét.

*Oldjuk meg az alábbi integrálegyenleteket:*

1212.

$$\int_0^{2\pi} \sin(x + y)\, \varphi(y)\, dy = \sin x.$$

*Útmutatás:* $K(x, y) = \sin(x + y)$ elfajult mag.

1213.

$$\int_0^1 e^{x-y}\, \varphi(y)\, dy = 4e^x.$$

1214.

$$\int_{-1}^{+1} (1 + xy + x^2 y^3)\, \varphi(y)\, dy = 2 - x + 5x^2.$$

1215.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 (2x + 3y)\, \varphi(y)\, dy = P_2(x),$$

$P_2(x)$ a másodfokú LEGENDRE-féle polinomot jelenti.

1216.

$$\varphi(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} (\sin x \sin y + \sin 2x \sin 2y)\, \varphi(y)\, dy = x.$$

1217.

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 x\, u\, \varphi(u)\, du + \frac{5}{6}\, x.$$

1218.

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^2 x\, u\, \varphi(u)\, du + \frac{5}{6}\, x.$$

1219.

$$\varphi(x) - 3 \int_0^1 x\, u\, \varphi(u)\, du = 3x - 2.$$

1220.

$$\varphi(x) - 3 \int_0^1 x\, u\, \varphi(u)\, du = 0.$$

1221. Határozzuk meg az $xu$ rezolvensét! $\Omega = (0, 1)$.

*Megoldandók az alábbi integrálegyenletek:*

1222.

$$\varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\sin x \sin y + \sin 2x \sin 2y)\, \varphi(y)\, dy = 1.$$

1223.

$$\varphi(x) = \frac{2}{(e+1)(e-1)} \int_0^1 e^{x+y}\, \varphi(y)\, dy.$$

1224.

$$\varphi(x) = 2 \int_0^1 e^{x+y}\, \varphi(y)\, dy.$$

1225.

$$u(x) - 2 \int_0^1 (1 + 3x\, t)\, u(t)\, dt = x^2.$$

1226. Határozzuk meg $K(x, y) \equiv y$ $(0 \leqq y \leqq 1)$ sajátértékeit!

1227. Mi a feltétele a

$$\varphi(x) - 2\int_0^1 y\,\varphi(y)\,dy = F(x)$$

egyenlet megoldhatóságának és mi a megoldás.

1228. Határozzuk meg a $K(x, y) = x + y$ mag $(0 \leqq x, y \leqq 1)$ sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

1229. Határozzuk meg $K(x, y) = x + y$ rezolvens magját $(0 \leqq x, y \leqq 1)$.

1230. Határozzuk meg

$$z(u) = \lambda \int_0^\pi \cos(u + v)\, z(v)\, dv$$

összes megoldásait.

1231. Melyek a

$$K(x, y) = x\,y - \frac{x + y}{2} + \frac{1}{3} \qquad (0 \leqq x, y \leqq 1)$$

mag sajátértékei és sajátfüggvényei?

1232. Mi az **1231.** feladatban szereplő mag rezolvense?

1233. Megoldandó a

$$\varphi(x, y) + \int_0^2 \int_0^2 [2 + x\,y\,u\,v - (x + y)\,u\,v]\,\varphi(u, v)\,du\,dv = 1$$

integrálegyenlet.

1234. Számítsuk ki a

$$K(x, y) = P_0(x)\,P_1(y) + P_2(x)\,P_3(y) \qquad (-1 \leqq x, y \leqq +1)$$

mag sajátértékeit. A $P_i(x)$ függvények a LEGENDRE-polinomokat jelentik.

1235. Adjuk meg a

$$K(x, y) = \cos^n(x - y) \qquad (-\pi \leqq x, y \leqq +\pi)$$

mag sajátértékeit és sajátfüggvényeit.

*Útmutatás:* Fejezzük ki $\cos^n x$-et a $\cos kx$-ek segítségével ($\cos^n x = \Sigma\, a_k \cos kx$).

**b) Másodfajú integrálegyenletek közelítő megoldása egyenletrendszer segítségével**

A megoldandó integrálegyenlet legyen a következő:

$$(\mathfrak{E} - \lambda\,\mathfrak{L})\varphi = f, \qquad (1.2.17)$$

ahol $\mathfrak{L}$ valamilyen (általában nem elfajuló) magnak megfelelő integráloperátor. Két alapvető módszert fogunk ismertetni (1.2.17)-nek egyenletrendszerrel való közelítő megoldására.

*α)* (1.2.17) helyett tekintsünk olyan másodfajú integrálegyenletet, melynek $K$ magja „keveset" különbözik az $\Omega$ integrációs tartományban az $L$ magtól. Ez utóbbi integrálegyenlet megoldása „keveset" különbözik az eredetileg megoldandó egyenlet megoldásától, ha $L$ bizonyos feltételeknek tesz eleget. Az $L$ magnak ilyen értelmű approximációja biztosan lehetséges, ha $\Omega$ véges és $L$ folytonos $\Omega$-ban. Ehhez nem kell például mást tennünk, mint $L$-et polinommal vagy trigonometrikus polinommal közelíteni. E módszer használhatósága a következő tételen alapszik:

Legyen $K(P, Q)$ olyan elfajult mag, melyre
1°.

$$\int_{\Omega} |L(P, Q) - K(P, Q)| \, d\Omega_Q < h \tag{1.2.18}$$

érvényes;
2°. a $K$ mag $R(P, Q; \lambda)$ rezolvense kielégíti a

$$\int_{\Omega} |R(P, Q; \lambda)| \, d\Omega_Q < B \tag{1.2.19}$$

feltételt.
3°. A zavaró függvényekre vonatkozóan pedig legyen igaz az

$$|f(P) - g(P)| < \eta \quad (P \in \Omega)$$

egyenlőtlenség;
4°. e becslésekben szereplő állandók között álljon fenn az

$$|\lambda| \, h(1 + |\lambda| B) < 1$$

összefüggés. Ekkor az

$$(\mathcal{E} - \lambda \mathcal{K}) \, y = g \tag{1.2.20}$$

integrálegyenlet megoldásának eltérése az (1.2.17) egyenlet megoldásától a következő módon becsülhető meg:

$$|\varphi(P) - y(P)| < \frac{N |\lambda| \, h(1 + |\lambda| B)^2}{1 - |\lambda| \, h(1 + |\lambda| B)} + \eta(1 + |\lambda| B) \quad (P \in \Omega), \tag{1.2.21}$$

$N$ jelenti $f(P)$ felső korlátját.

Megjegyzés: ha $h$ és $\eta \to 0$, akkor $y(P)$ egyenletesen tart $\varphi(P)$-hez. Ez a tény az (1.2.17) alatti egyenlet (nem közelítő) megoldása szempontjából fontos.

*β)* A másik módszer azon alapszik, hogy az (1.2.17) bal oldalán szereplő integrált (e módszer alkalmazásánál feltesszük, hogy $\Omega$ korlátos tartomány) valamilyen közelítő összeggel, például integrálközelítő összeggel pótoljuk. Az $\Omega$ tartományt osszuk fel a $\Delta\Omega_1$, $\Delta\Omega_2, \ldots, \Delta\Omega_n$ résztartományra, a $\Delta\Omega_i$ tartomány egy tetszőleges pontja legyen $Q_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Pótoljuk az integrálegyenletet a

$$g(Q_j) - \lambda \sum_{i=1}^{n} L(Q_j, Q_i) \, g(Q_i) \, \Delta\Omega_i = f(Q_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.2.22}$$

egyenletrendszerrel. A numerikus számolásoknál lehetőleg ekvidistans beosztást használunk: $\Delta\Omega_i = h$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ebből $\lambda$ alkalmas megválasztásával a $g(Q_j)$ számok meghatározhatók. A $g$-megoldás közelítő kifejezését a $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ pontokon való interpoláció segítségével nyerhetjük.

Megjegyzés: e módszer nemcsak a közelítő megoldás meghatározására alkalmas. Ha az $L$ mag például folytonos a zárt $\Omega$ tartományon, akkor az eljárás által kapott közelítő függvény a tényleges megoldáshoz konvergál a felosztás minden határon túl való finomításával.

A most vázolt eljárás általánosítható, ha az integráljelet nem integrálközelítő összeggel, hanem valamilyen más mechanikus kvadratúraformulával pótoljuk. (Ezeknél szorítkozzunk arra az esetre, amikor $\Omega$ egy véges $(a, b)$ számköz.)

Ismeretes, hogy ezek mind a következő alakúak:

$$\int_a^b g(x) \, dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \tag{1.2.23}$$

ahol az $A_k$-k pozitív számok, amelyekre

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = b - a.$$

Ha például

$$x_1 = a;\ x_2 = a + \frac{b-a}{n}, \ldots, x_n = a + (n-1)\frac{b-a}{n}$$

és

$$A_k = \frac{b-a}{n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

akkor az integrálközelítő összeget kapjuk. Vagy ha

$$x_1 = a;\ x_2 = a + \frac{b-a}{n-1}, \ldots, x_n = b$$

és

$$A_1 = A_n = \frac{b-a}{2(n-1)},$$

$$A_2 = A_3 = \ldots = A_{n-1} = \frac{b-a}{n-1},$$

nyerjük a trapézszabály szolgáltatta összeget. Integrálegyenletek numerikus megoldásánál gyakran használják jó eredménnyel az ún. GAUSS-féle formulát. Ennél az $x_i$ számok a LEGENDRE polinom gyökei, az $A_k$ állandók pedig az ún. GAUSS-féle együtthatók. Hogy ezt a formulát használhassuk, közöljük a GAUSS-abszcisszák és együtthatók táblázatát. Az alapintervallum a $(-1, +1)$ számköz.

| $k$ | $x_k$ | $A_k$ |
|---|---|---|
| 2 | −0,577 35 | 1,000 00 |
| | 0,577 35 | 1,000 00 |
| 3 | −0,774 60 | 0,555 56 |
| | 0 | 0,888 88 |
| | 0,774 60 | 0,555 56 |
| 4 | −0,861 14 | 0,347 86 |
| | −0,339 98 | 0,652 14 |
| | 0,339 98 | 0,652 14 |
| | 0,861 14 | 0,347 86 |
| 5 | −0,906 18 | 0,236 92 |
| | −0,538 47 | 0,478 62 |
| | 0 | 0,568 88 |
| | 0,538 47 | 0,478 62 |
| | 0,906 18 | 0,236 92 |

Ha az alapintegrál az $(a, b)$ számköz, akkor az abszcisszákat a

$$\xi_k = \frac{b-a}{2} x_k + \frac{b+a}{2}$$

képlettel kell meghatározni; a GAUSS-együtthatókat pedig $\frac{b-a}{2}$-vel kell megszorozni.

Ha az (1.2.23) típusú kvadratúraformulák valamelyikét használjuk, akkor a következő lineáris egyenletrendszert kapjuk a $\varphi(x_i)$ számok részére:

$$\varphi(x_i) - \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x_i, x_k)\, \varphi(x_k) = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1.2.24)$$

Ebből a $\varphi(x_i)$ mennyiségeket kiszámítva (ha ez lehetséges), valamely interpolációs eljárás segítségével kapjuk meg az integrálegyenlet közelítő megoldását. Legegyszerűbben azonban úgy járunk el, ha a $\varphi(x_i)$ számok ismeretében közelítő megoldásként a

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} K(x, x_k)\, \varphi(x_k) \qquad (1.2.25)$$

függvényt tekintjük.

A mondott eljárás arra is felhasználható, hogy a mag sajátértékeit közelítőleg kiszámíthassuk. Az (1.2.24) egyenletrendszer determinánsa ugyanis:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda A_1 K(x_1, x_1) & -\lambda A_2 K(x_1, x_2) \ldots & -\lambda A_n K(x_1, x_n) \\ \vdots & & \\ -\lambda A_1 K(x_n, x_1) & -\lambda A_2 K(x_n, x_2) \ldots & 1 - \lambda A_n K(x_n, x_n) \end{vmatrix}. \qquad (1.2.26)$$

Ha $\Delta(\lambda) \neq 0$, akkor (1.2.25) szolgáltatja az inhomogén egyenlet egyetlen megoldásának közelítő kifejezését. A $\Delta(\lambda) = 0$ egyenlet gyökei viszont a sajátértékek közelítő értékeit adják.*

*Feladatok*

**1236.** Adjuk meg a

$$\varphi(u) - \int_0^{0,5} \sin uv\, \varphi(v)\, dv = f(u)$$

inhomogén egyenlet közelítő megoldását. Módszer: a magot közelítsük polinommal Adjuk meg az elkövetett hiba megbecslését!

*Útmutatás:* Fejtsük hatványsorba a magot, és pótoljuk azt a sor harmadfokú részletösszegével.

**1237.** Adjuk meg a

$$\mu(t) + \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{6{,}8 - 3{,}2 \cos(t + \tau)} \mu(\tau)\, d\tau = 25 - 16 \sin^2 t$$

integrálegyenlet közelítő megoldását az integrálnak közelítőösszeggel való helyettesítése révén.

*Útmutatás:* Az integrációs intervallumot osszuk fel 12 egyenlő részre. Használjuk ki a mag és a zavaró függvény periodikus voltát!

**1238.** Határozzuk meg a

$$\varphi(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{xy} \varphi(y)\, dy = 1 - \frac{1}{2x}(e^x - 1)$$

integrálegyenlet közelítő megoldását az integrálnak GAUSS-típusú összeggel való helyettesítése révén.

*Útmutatás:* Legyen a számítás kapcsán $n = 2$.

**1239.** Számítsuk ki az **1238.** alatti integrálegyenlet közelítő megoldását a magnak elfajult maggal való pótlása segítségével. Becsüljük meg az elkövetett hibát!

*Útmutatás:* A magot fejtsük TAYLOR-sorba, melyből csupán az első két tagot tartsuk meg.

**c) Integrálegyenletek megoldása végtelen sok ismeretlenes egyenletrendszerrel**

Legyen egyszerűség kedvéért $\Omega$ valamely (véges vagy végtelen) $(a, b)$ intervallum. Tekintsük a $\{\varphi_n(x)\}$ és $\{\psi_m(y)\}$ ortonormált és teljes függvényrendszereket. A megoldandó integrálegyenlet legyen például a

$$\mathcal{K} \varphi = f \tag{1.2.27}$$

elsőfajú integrálegyenlet. Szorozzuk ezt végig $\varphi_n(x)$-szel, és integráljunk az $(a, b)$ számközre:

$$(\varphi_n, \mathcal{K} \varphi) = (f, \varphi_n).$$

* Valamely sajátértékhez közeledve $\lambda$-val (1.2.25) egyre rosszabb közelítést szolgáltat.

Tegyük fel, hogy a $K$ mag olyan, hogy a bal oldalon szereplő kétszeres integrálban az integrációk sorrendje felcserélhető: így a

$$(\mathcal{K}^* \varphi_n, \varphi) = (f, \varphi_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.2.28}$$

egyenletrendszert kapjuk. $\mathcal{K}^*$ jelenti $\mathcal{K}$ adjungált operátorát, vagyis a $K(y, x)$ maghoz tartozó integráloperátort. (1.2.28) bal oldalára alkalmazzunk két függvény szorzatintegráljával kapcsolatos PARSEVAL-képletet:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\mathcal{K}^* \varphi_n, \psi_m)(\varphi, \psi_m) = (f, \varphi_n),$$

vagy

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} y_m = f_n, \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.2.29}$$

ahol

$$a_{nm} = (\mathcal{K}^* \varphi_n, \psi_m), \qquad y_m = (\varphi, \psi_m), \qquad f_n = (f, \varphi_n).$$

Ha az (1.2.29) végtelen sok ismeretlenes egyenletrendszert megoldjuk, megkapjuk az ismeretlen $\varphi$ függvény egy teljes függvényrendszerre vonatkozó FOURIER-együtthatóit, tehát magát a $\varphi$ függvényt. Az egyenletrendszer

$$A = (a_{nm})$$

mátrixát a $K$ mag *magmátrixának* hívjuk. Persze egy magnak végtelen sok magmátrixa van aszerint, hogy hogyan választjuk a $\{\varphi_n\}$ és $\{\psi_m\}$ alaprendszereket. Az (1.2.29) egyenletrendszer megoldása általában nehéz feladat. Szerencsére azonban az alaprendszerek — bizonyos feltételeknek eleget tevő magok esetén — mindig választhatók úgy, hogy a magmátrix igen egyszerű szerkezetű legyen. Így a végtelen sok ismeretlenes egyenletrendszer megoldása nem jelent különös nehézséget. Létezik kidolgozott módszer arra nézve, hogy hogyan kell ezeket a különleges alaprendszereket meghatározni. Ezzel, a szűkre szabott keretek miatt nem foglalkozunk, megjegyezve azonban, hogy igen sok magnál ilyen jól kezelhető magmátrixra vezethető alaprendszerek ad hoc módszerekkel is meghatározhatók.

Érvényes a következő alapvető tétel: ha $K(x, y)$ az $(a, b)$ intervallumban változói szerint négyzetével LEBESGUE szerint integrálható, továbbá bármely két, $f(x)$ és $g(y)$ négyzetével együtt integrálható függvényre

$$(f, \mathcal{K} g) = (\mathcal{K}^* f, g),$$

ez esetben (1.2.27)-et akkor és csak akkor elégíti ki négyzetével együtt integrálható függvény, ha az (1.2.29) egyenletrendszernek van olyan megoldása, melyre a $\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2$ végtelen összeg konvergens. Ez esetben az elsőfajú integrálegyenlet megoldása

$$\varphi(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} y_i \psi_i(x).$$

A vázolt módszer elvileg szimmetrikus magú $[K(x, y) = K(y, x)]$ másodfajú integrálegyenletekre is kiterjeszthető, ennél azonban a megoldás effektív keresztülvitele sokkal nehézkesebb, mint elsőfajú egyenleteknél, ezért legtöbbször csak elsőfajú integrálegyenletek megoldására szokták használni.

*Feladatok*

**1240.** Megoldandó az

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(1 + \operatorname{cotg} \frac{x - y}{2}\right) \varphi(y)\, dy = f(x)$$

elsőfajú integrálegyenlet.

*Megjegyzés és útmutatás:* Az integrál CAUCHY-féle főértéke veendő. Alkalmazzuk a végtelen sok ismeretlenes egyenletrendszerek módszerét. Alapfüggvényrendszerek:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}; \quad \psi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iny}. \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Számítás során vegyük figyelembe a FOURIER-sorok elméletéből ismert

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\, dt = \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

képletet.

**1241.** Megoldandó az

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{\cos y - \cos x} \varphi(y)\, dy = f(x)$$

integrálegyenlet. Adjuk meg annak szükséges és elégséges feltételét, hogy az egyenlet négyzetével együtt integrálható függvénnyel megoldható legyen!

*Megjegyzés és útmutatás:* Az integrál CAUCHY-féle főértéke veendő figyelembe Az alapfüggvényrendszer

$$\varphi_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$\psi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin ny. \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

A számításnál használjuk fel az

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{\cos t - \cos x}\, dt = \frac{\sin nx}{\sin x} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

jól ismert képletet.

**1242.** Megoldandó

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos y - \cos x} \varphi(y)\, dy = f(x).$$

*Útmutatás:* Alapfüggvényrendszer gyanánt célszerű az alábbit választani:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx; \quad \psi_0(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \psi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos ny. \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

**1243.** Megoldandó az alábbi elsőfajú integrálegyenlet:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\gamma(\xi)}{t - \xi}\, d\xi = \Phi(t).$$

*Útmutatás:* Alkalmas új változókat használva, vezessük vissza ezt az egyenletet az **1241.** feladatban szereplő integrálegyenletre.

**1244.** Oldjuk meg az alábbi elsőfajú integrálegyenletet:

$$\frac{\varrho}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{\sin(x+y)}{1-2\varrho\cos(x+y)+\varrho^2}+\frac{\sin(x-y)}{1-2\varrho\cos(x-y)+\varrho^2}\right]\varphi(y)\,dy=f(x).$$

Adjuk meg annak szükséges és elégséges feltételét, hogy létezzék négyzetével együtt integrálható megoldás.

*Útmutatás:* Vegyük figyelembe, hogy a mag (egy konstans faktortól eltekintve)

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-\varrho\, e^{i(x+y)}}+\frac{1}{1-\varrho\, e^{i(x-y)}}\right).$$

A jobb oldalon álló függvényeket fejtsük $z=\varrho\, e^{i(x\pm y)}$ hatványai szerint haladó sorba. A kapott sorból állapítsuk meg, mely függvények alkalmasak az alapfüggvények szerepének betöltésére. Ezekkel képezzük a magmátrixot.

**1245.** Bizonyítsuk be, hogy a

$$K(x,y)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1-\cos(x+y)}{1-\cos(x-y)}$$

mag sajátfüggvényei: $\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$ $(n=1,2,\ldots)$; sajátértékei: $\lambda_n=n$.

**1246.** Megoldandó az alábbi elsőfajú integrálegyenlet:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\ln\frac{1-\cos(x+y)}{1-\cos(x-y)}\,\varphi(y)\,dy=f(x).$$

Milyennek kell lennie $f(x)$-nek, hogy az egyenletnek létezzék négyzetével együtt integrálható megoldása.

*Útmutatás:* Használjuk ki, hogy a mag szimmetrikus és alkalmazzuk az **1245.** feladat eredményét.

**1247.** Bizonyítsuk be, hogy az

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{x-t}\,dt=f(x)$$

integrálegyenlet megoldása

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{x-t}\,dx.$$

Megjegyzés: az állítás azt jelenti, hogy $\varphi$-t az $f$-be leképező transzformáció uniter. Ezt a transzformációt Hilbert-féle transzformációnak hívják.

*Útmutatás:* Először igazoljuk az állítást a $\varphi(t) = \cos\lambda t$ függvényre, majd alkalmazzuk a végtelen sok ismeretlenes egyenletrendszerek módszerét a következő alapfüggvényekkel:

$$\psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}}} H_n(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}}$$

(HERMITE-féle függvények, $H_n(t)$ HERMITE-féle polinom),

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_n(t)}{x-t}\, dt.$$

Használjuk fel a számításnál, hogy

$$\psi_n(t) = i^{-n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \psi_n(\lambda) \cos\lambda\, t\, d\lambda, \quad \text{ha } n \text{ páros és}$$

$$\psi_n(t) = i^{-n+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \psi_n(\lambda) \sin\lambda\, t\, d\lambda, \quad \text{ha } n \text{ páratlan.}$$

**1248.** Megoldandó

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)}{x-t}\, dt = f(x).$$

*Útmutatás:* Alkalmas új változók bevezetésével vezessük vissza az **1242.** feladatra. A transzformációs képletek:

$$x = \frac{1}{\cos u + 1} - \frac{1}{2}; \quad t = \frac{1}{\cos v + 1} - \frac{1}{2}.$$

**1249.** Megoldandó:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\, \varphi(y)\, dy = f(x).$$

Megjegyzés: $\varphi$-t az $f$-be vivő transzformációt FOURIER-**transzformációnak hívjuk.**

*Útmutatás:* Használjuk ki a mag szimmetriáját. Legyen

$$\varphi_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}}}\, e^{\frac{x^2}{2}}\, \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

(HERMITE-féle függvények.)

**1250.** Páros $f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ függvények esetén az

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos xt\, \varphi(t)\, dt = f(x)$$

koszinusztranszformáció megfordítása

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos xt\, f(x)\, dx.$$

Páratlan $f(x)$ esetén a

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin xt\, \varphi(t)\, dt = f(x), \qquad \varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin xt\, f(x)\, dx$$

egyenletpár érvényes.

**1251.** Oldjuk meg az

$$\sum_{l=1}^{n} a_{kl} f_l(x) + \lambda \int_0^\infty \cos xt\, f_k(t)\, dt = g_k(x). \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

integrálegyenletrendszert. ($a_{kl}$-k adott számok, $|a_{kl}|_1^n \neq 0$*; $f_k(x)$ ismeretlen, $g_k(x)$ adott függvények.)

**1252.** Állapítsuk meg az

$$\int_0^\infty e^{-st} \varphi(t)\, dt = f(s)$$

integráltranszformáció megfordítását, ha $f\left(\frac{1+u}{2-2u}\right)$ a $-1 < u < +1$ számközben analitikus.

Megjegyzés: a feladat a LAPLACE-transzformáció megfordítási feladata.

*Útmutatás:* A $\varphi$ függvényt fejtsük LAGUERRE-polinomok szerint haladó sorba, $s = \frac{1}{2} \frac{1+u}{1-u}$ helyettesítés végrehajtása során kapott zavaró függvényt pedig hatványsorba fejtjük, és a megfelelő együtthatókat egyenlővé tesszük.

## 1.3. Integrálegyenletek megoldása differenciálegyenletek segítségével

Számos integrálegyenletet könnyen vissza lehet vezetni differenciálegyenletekre. A módszer csaknem mindig az alábbi elemi differenciálási szabályokon alapszik:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x K(x, y)\, \varphi(y)\, dy\right) = K(x, x)\, \varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} \varphi(y)\, dy.$$

Az elmondottakból következik, hogy a vázolt módszer igen gyakran alkalmazható ún. VOLTERRA-maggal bíró integrálegyenletekre. VOLTERRA típusú magon olyan magot kell érteni, mely azonosan eltűnik, ha $y > x$.

* Ezen az $a_{ik}$-kból képezett $n$-ed rendű determinánst értjük.

*Feladatok*

*Megoldandók az alábbi integrálegyenletek:*

**1301.**

$$u(x) - 4\int_0^x (t-x)\,u(t)\,dt = x.$$

**1302.**

$$\int_0^x \left[\left(1 + 4y + \frac{3}{2}y^2\right) - (4+3y)\,x + \frac{3}{2}x^2\right]\varphi(y)\,dy = x^3.$$

*Útmutatás:* Célszerű a magot $(x - y)$ hatványai szerint átrendezni, utána az egyenlet mindkét oldalát háromszor differenciálni.

**1303.**

$$\int_0^x [\,9y^2 + 9y(y-x) - 2(y-x)^2\,]\,\varphi(y)\,dy = \frac{4}{3}x^4$$

egyenletnek határozzuk meg az $x = 0$ pontban véges megoldását.

**1304.** Határozzuk meg a $K(x, y) = -\frac{1}{2}|x-y| + \frac{1}{4}$ mag sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

**1305.** Igazoljuk, hogy a

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 4(a^2 - 4k^2\cos 2x)\,\varphi = 0$$

differenciálegyenlet minden $2\pi$ szerint periodikus megoldása eleget tesz a

$$\varphi(x) = \lambda\int_{-\pi}^{+\pi} e^{4\sqrt{2}\,k\cos x\cos y}\,\varphi(y)\,dy$$

integrálegyenletnek.

*Útmutatás:* A differenciálegyenlet periodikus megoldásai a MATHIEU-függvények.

**1306.** Határozzuk meg a

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^{\pi} \sin|x-y|\,\varphi(y)\,dy$$

nem azonosan eltűnő megoldásait.

*Útmutatás:* L. az 1304. feladat megoldásainál követett módszert.

**1307.** Bizonyítsuk be, hogy ha valamely folytonos magra

$$\int_x^y K(x,t)\,dt = \int_x^y K(t,y)\,dt,$$

akkor $K(x, y) = K(x-y)$ alakú.

1308. Ha valamely folytonos magra

$$\int_x^y K(x, t)\, dt = -\int_x^y K(t, y)\, dt,$$

akkor $K(x, y) \equiv 0$.

1309. Oldjuk meg a

$$\varphi(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 |x - y|\, \varphi(y)\, dy = x$$

inhomogén integrálegyenletet.

1310. Megoldandó

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty (x - y)^{\alpha-1} \varphi(y)\, dy$$

($\alpha$ természetes egész).

## 1.4. Másodfajú integrálegyenletek megoldása szukcesszív approximációval

A megoldandó egyenletet írjuk

$$\varphi = f + \lambda \mathcal{K} \varphi \tag{1.4.1}$$

alakba. A sorozatos közelítések:

$$\varphi_0 \equiv 0, \quad \varphi_1 = f, \quad \varphi_2 = f + \lambda \mathcal{K} \varphi_1 = f + \lambda \mathcal{K} f,$$

$$\varphi_3 = f + \lambda \mathcal{K} \varphi_2 = f + \lambda \mathcal{K} f + \lambda^2 \mathcal{K}^2 f, \ldots,$$

$$\varphi_n = f + \lambda \mathcal{K} \varphi_{n-1} = f + \lambda \mathcal{K} f + \lambda^2 \mathcal{K}^2 f + \ldots + \lambda^{n-1} \mathcal{K}^{n-1} f =$$

$$= (\mathcal{E} + \lambda \mathcal{K} + \lambda^2 \mathcal{K}^2 + \ldots + \lambda^{n-1} \mathcal{K}^{n-1}) f, \ldots$$

$\mathcal{K}^n$ jelenti a $\mathcal{K}$ *n*-ik *iterált operátorát*: $\mathcal{K}^1 = \mathcal{K}$, $\mathcal{K}^2 = \mathcal{K}\mathcal{K}$, $\mathcal{K}^3 = \mathcal{K}\mathcal{K}^2, \ldots, \mathcal{K}^n = \mathcal{K}\mathcal{K}^{n-1}$. A hozzájuk tartozó

$$K_2(P, Q) = \int_\Omega K(P, T)\, K(T, Q)\, d\Omega_T, \ldots, \quad K_n(P, Q) = \int_\Omega K(P, T)\, K_{n-1}(T, Q)\, d\Omega_T$$

függvények a $K$ mag ún. *iterált magjai.*

A $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ függvények az alábbi végtelen sor részletösszegei:

$$f + \lambda \mathcal{K} f + \lambda^2 \mathcal{K}^2 f + \ldots + \lambda^n \mathcal{K}^n f + \ldots = (\mathcal{E} + \lambda \mathcal{K} + \ldots + \lambda^n \mathcal{K}^n + \ldots) f. \tag{1.4.2}$$

Ezt a sort NEUMANN-*féle sornak* nevezzük. Ha valamely $\lambda$ mellett $P$ és $Q$ ($\in \Omega$) változóiban egyenletesen konvergál, akkor e sor összege az integrálegyenlet egyetlen megoldását szolgáltatja. Ha $\Omega$ véges, akkor korlátos mag és korlátos zavaró függvény mellett a NEUMANN-sor biztosan egyenletesen konvergens, feltéve, hogy

$$|\lambda| < \frac{1}{M|\Omega|}, \tag{1.4.3}$$

ahol $|K| \leq M$, $|\Omega|$ a tartomány mértéke. A

$$\mathcal{K} + \lambda \mathcal{K}^2 + \lambda^2 \mathcal{K}^3 + \ldots$$

operátornak megfelelő magot:

$$R(P, Q; \lambda) = K(P, Q) + \lambda K_2(P, Q) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(P, Q) + \ldots \quad (1.4.4)$$

a $K$ mag *rezolvens magjának* (rezolvensének) nevezzük. Ennek sora konvergens, ha $\lambda$ az (1.4.3) feltételnek tesz eleget. Rögzített $P$ és $Q$ mellett $R(P,Q;\lambda)$ mint $\lambda$ függvénye az (1.4.3) körben egy analitikus függvény elemének tekintve folytatható az egész komplex $\lambda$ számsíkra. Ez egy meromorf függvény. Ha $\lambda$ ennek nem szinguláris pontja, akkor (1.4.1) egyenletnek egyetlen egy megoldása van tetszőleges négyzetével együtt integrálható $f$ mellett, és ez a megoldás

$$\varphi = (\mathcal{E} + \lambda \mathcal{R}_\lambda) f \quad (1.4.5)$$

alakban írható fel. $R_\lambda$ jelenti az $R(P, Q; \lambda)$ magnak megfelelő integráloperátort.

Gyakran nagyon jól használható az alábbi iterációs eljárás:

$$u_{n-1} = \Theta u_n + \lambda(1 - \Theta) \mathcal{K} u_n + (1 - \Theta) f. \quad (1.4.6)$$

Ha $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ a $\mathcal{K}$ sajátértékei, akkor az eljárás konvergenciájának elégséges feltétele:

$$|\Theta| < 1, \quad \left|\Theta + (1 - \Theta)\frac{\lambda}{\lambda_i}\right| < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

$\Theta$ alkalmas megválasztása növelheti a konvergencia sebességét.

Az előbbi feltételek teljesülése esetén az $u_n(x)$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az integrálegyenlet $\varphi$ megoldásához, bármi legyen is a kiindulási $u_0$ függvény.

## Feladatok

*Szukcesszív approximációval megoldandók az alábbi integrálegyenletek:*

1401.

$$u(x) + \int_0^x (x - t)\, u(t)\, dt = 1.$$

1402.

$$2\varphi(x) - \int_0^1 |x - y|\, \varphi(y)\, dy = (x - 1) \operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1.$$

1403.

$$\varphi(x) + \int_0^1 xy\, \varphi(y)\, dy = x^2.$$

1404. Oldjuk meg az elfajult magú integrálegyenletet szukcesszív approximáció módszerével.

1405. Legyen

$$K(x, y) = \min(x, y).$$

Oldjuk meg az (1.4.6) alatt ismertetett módszerrel a

$$\varphi(x) + 3\int_0^1 K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 1$$

integrálegyenletet. $\left(\text{Legyen } \Theta = \frac{1}{2},\ u_0 \equiv 1.\right)$

1406. Teljesítse a $K(x, y)$ mag és az $f(x)$ függvény az $a \leqq x, y \leqq b$ véges tartományban az alábbi feltételeket:

1°. $\frac{\partial K}{\partial x}$ létezik és korlátos.

2°. $K(x, x) \neq 0 \quad (a \leqq x \leqq b)$.

3°. $\frac{df}{dx}$ létezik és korlátos.

4°. $f(a) = 0$.

Oldjuk meg a

$$\int_a^x K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x)$$

elsőfajú integrálegyenletet.

*Útmutatás:* Differenciáljuk az egyenlet mindkét oldalát.

1407. Oldjuk meg az alábbi integrálegyenletet:

$$\int_0^x \cos(x - y)\, \varphi(y)\, dy = \frac{x^2}{2}.$$

## 1.5. Első- és másodfajú integrálegyenletek megoldása integráltranszformációk segítségével

Az alábbi, ún. VOLTERRA-típusú integrálegyenlet:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x k(x - t)\, \varphi(t)\, dt = f(x)$$

a következő gondolat felhasználásával is megoldható: Ha feltesszük, hogy $k(t)$ és $f(t)$ függvények minden nem-negatív $t$-re értelmezve vannak, és LAPLACE-transzformáltjuk létezik, alkalmazva a LAPLACE-transzformáció konvolúciótételét azt kapjuk, hogy

$$[1 - \lambda\, K(p)]\, \Phi(p) = F(p),$$

ahol $\Phi(p)$, $K(p)$ és $F(p)$ a $\varphi$, $k$ és $f$ függvények LAPLACE-transzformáltja. Ha

$$\varphi(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{F(p)}{1 - \lambda\, K(p)}\right)$$

létezik, akkor ez integrálegyenletünk megoldása.* Tegyük fel, hogy

$$R(t; \lambda) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{K(p)}{1 - \lambda\, K(p)}\right)$$

létezik, akkor

$$\varphi(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left(F(p) + \lambda \frac{K(p)}{1 - \lambda\, K(p)} F(p)\right) = f(t) + \lambda \int_0^t R(t - x; \lambda)\, f(x)\, dx.$$

$R(t - x; \lambda)$ tehát $k(t - x)$ rezolvense.

* $\mathfrak{L}^{-1}$ az inverz LAPLACE-transzformáció jele.

Hasonlóképpen járunk el a

$$\int_0^x k(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

elsőfajú integrálegyenlet esetén is:

$$\mathrm{N}(p) = \frac{F(p)}{K(p)},$$

és ha

$$\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{F(p)}{K(p)}\right)$$

létezik, akkor ez integrálegyenletünk megoldása. A LAPLACE-transzformáció konvolúciótételének általánosítása az ún. EFROSZ-féle tétel, mely szintén hasznosnak bizonyul bizonyos integrálegyenlet megoldásánál. A tétel a következőképpen szól: ha

$$\mathfrak{L}\{\varphi(t)\} = \Phi(p) \quad \text{és} \quad \mathfrak{L}_t\{K(t,y)\} = F(p)\,e^{-y\,\varphi(p)}, \tag{1.5.1}$$

ahol $F$ és $\varphi$ az $y$-tól független, akkor

$$\mathfrak{L}\left\{\int_0^\infty K(t,y)\,\varphi(y)\,dy\right\} = F(p)\,\Phi[f(p)].$$

Az eddigiekhez teljesen hasonló gondolatmenetet követhetünk, ha az integrálegyenletben

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\,\varphi(y)\,dy$$

alakú integrál szerepel. Ez esetben FOURIER-transzformációt érdemes alkalmazni.

Integráltranszformációk nemcsak integrálegyenletek, hanem integro-differenciálegyenletek megoldásánál is sikerrel járnak. Például a

$$\varphi'(x) - \lambda\int_0^t k(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

integro-differenciálegyenlet a LAPLACE-transzformáció alkalmazásával a

$$p\,\Phi(p) - \lambda\,K(p)\,\Phi(p) = F(p) + \varphi(0)$$

egyenletbe megy át, amiből

$$\Phi(p) = \frac{F(p) + C}{p - \lambda\,K(p)}.$$

Ha ennek inverz LAPLACE-transzformáltja létezik, akkor az egyenletünk megoldását adja. $C$ tetszőleges állandó.

FREDHOLM típusú és

$$\int_0^{2\pi} k(x-t)\,\varphi(t)\,dt$$

integrált tartalmazó integrálegyenletek $2\pi$ szerint periodikus $k(t)$ esetén véges FOURIER transzformációval (a tagok FOURIER-együtthatóit képezve) könnyen megoldhatók.

*Feladatok*

*Oldjuk meg az alábbi integrálegyenleteket:*

1501.

$$\varphi(x) - \int_0^x k(x-t)\,\varphi(t)\,dt = k(x),$$

ahol

$$k(t) = \left(a_{01} + \frac{a_{11}}{1!}t + \ldots + \frac{a_{n_1 1}}{n_1!}t^{n_1}\right)e^{\alpha_1 t} + \ldots +$$

$$+ \left(a_{0k} + \frac{a_{1k}}{1!}t + \ldots + \frac{a_{n_k k}}{n_k!}t^{n_k}\right)e^{\alpha_k t}.$$

($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ különböző adott számok.)

1502.

$$\varphi(x) - 4e^{4x}\int_0^x (x-t)\,e^{-4t}\,\varphi(t)\,dt = x^3 e^{4x}.$$

1503.

$$2\varphi(x) - \int_0^x J_0(x-y)\,\varphi(y)\,dy = J_0(x).$$

$J_0$ a 0 indexű, elsőfajú BESSEL-függvény.

*Útmutatás:* $\mathfrak{L}\{J_0\} = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$.

1504.

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi x}}.$$

*Útmutatás:*

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{1}{\pi}\,t^{-\frac{1}{2}}\right\} = p^{-\frac{1}{2}}$$

1505.

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{x+t}\,dt = f(x).$$

*Útmutatás:* $x = e^{\xi}$, $t = e^{\tau}$ helyettesítéssel visszavezetjük egyenletünket egy másikra, melyre alkalmazzunk FOURIER-transzformációt.

1506.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+\varrho^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+4h^2}}\right]g(\xi)\,d\xi = f(x).$$

*Útmutatás:* Vezessünk be új változókat: $x = \varrho s$, $\xi = \varrho t$, és vegyük figyelembe, hogy $\frac{1}{\sqrt{t^2+4\eta^2}}$ FOURIER-transzformáltja $i\sqrt{\frac{\pi}{2}}H_0^{(1)}(2\,i\,\eta\,u)$, ahol $H_0^{(1)}$ a nullindexű elsőfajú Hankel-függvényt jelenti.

**1507.** Legyen $K(t)$ $2\pi$ szerint periodikus, négyzetével együtt integrálható függvény. Adjuk meg a

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} K(x-y)\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

egyenlet megoldását.

*Útmutatás:* Képezzük az egyenlet minden tagjának FOURIER-együtthatóit (alkalmazzunk véges FOURIER-transzformációt).

**1508.** Oldjuk meg a

$$\varphi'(x) - \lambda \int_0^{2\pi} K(x-y)\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

integro-differenciálegyenletet. $K$ ugyanazoknak a feltételeknek van alávetve, mint az 1507. feladatban.

**1509.** Keressük meg azt a $K(x-y)$ alakú $2\pi$ szerint periodikus négyzetével együtt integrálható magot, melyre

$$K_2(x-y) = K(x-y).$$

**1510.** Oldjuk meg az

$$\int_0^{\pi} |\sin(x-y)|\,\varphi(y)\,dy = 1$$

elsőfajú integrálegyenletet.

**1511.** A LAPLACE-transzformáció segítségével bizonyítsuk be, hogy a

$$\psi(x) - \lambda \int_0^{x} k(x-t)\,\psi(t)\,dt = g^{(n)}(x)$$

integrálegyenlet megoldása: $\varphi^{(n)}(x)$, ahol $\varphi(x)$ az

$$y(x) - \lambda \int_0^{x} k(x-t)\,y(t)\,dt = g(x)$$

integrálegyenlet megoldása, feltéve, hogy $g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n-1)}(0)$.

**1512.** Keressük az alábbi (ún. LALESCO-féle) homogén integrálegyenlet nem triviális megoldásait:

$$f(x) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-|x-t|} f(t)\,dt.$$

Milyennek kell választani a $\lambda$-t, hogy ilyen létezzék?

*Útmutatás:* Az egyenlet mindkét oldalára alkalmazzunk LAPLACE-transzformációt.

1513. Bizonyítsuk be, hogy ha a

$$\sum \frac{(-1)^n}{n!} f_n(x)\, y^n$$

sor $x$ és $y$ minden nem-negatív értéke mellett egyenletesen konvergens, akkor a

$$K(x, y) = g(x) * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} f_n(x)\, y^n$$

mag olyan, melyre az EFROSZ-tétel alkalmazható.

$$\left(g * h = \int_0^x g(x-t)\, h(t)\, dt,\ f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(x-t)\, dt;\ f_0(x) \equiv f(x)\right).$$

1514. Határozzuk meg a

$$\varphi'(x) + \int_0^{\infty} K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = e^x$$

integro-differenciálegyenlet azon megoldását, melyre $\varphi(0) = 0$, ahol

$$K(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} y^n \int_0^x \sin(x-t)\, t^n\, dt.$$

*Útmutatás:* Alkalmazzuk az EFROSZ-tételt.

1515. Oldjuk meg az alábbi első fajú integrálegyenletet:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}} f(y)\, dy = g(x).$$

*Útmutatás:* $\mathfrak{L}_x \left\{ \frac{\cos 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}} \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{y}{p}}$, alkalmazzuk az Efrosz-formulát.

Megoldandók az alábbi első fajú integrálegyenletek:

1516.

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\sqrt{xy}}{\sqrt{y}} f(y)\, dy = g(x).$$

*Útmutatás:* $\mathfrak{L}_x \left\{ \frac{\sin 2\sqrt{xy}}{\sqrt{y}} \right\} = \frac{1}{p} \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{y}{p}}.$

1517.

$$\int_0^{\infty} \sin^2 x t\, f(t)\, dt = x\, e^{-x}.$$

*Útmutatás:* $$\mathfrak{L}_x\left\{\frac{\sin^2 x t}{\sqrt{x}}\right\}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(1-e^{-\frac{t}{p}}\right).$$

**1518.**

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{t}{t^2+x^2} f(x)\,dx = g(t).$$

*Útmutatás:* $$\mathfrak{L}_y\{\cos x y\}=\frac{t}{t^2+x^2}.$$

**1519.**

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{f(x)}{t^2+x^2}\,dx = g(t).$$

*Útmutatás:* $$\mathfrak{L}_t^{-1}\left\{\frac{1}{t^2+x^2}\right\}=\frac{1}{x}\sin x y.$$

**1520.**

$$\int_0^\infty k(t)\, f(x+t)\,dt = g(x) \qquad (f \text{ az ismeretlen}).$$

*Útmutatás:* Az egyenlet mindkét oldalára alkalmazzuk az inverz LAPLACE-transzformációt.

**1521.**

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{(t+x)^n}\,dx = \frac{1}{t^m} \qquad (n > m > 0).$$

*Útmutatás:* Az előző feladatnál követett módszert alkalmazzuk.

**1522.**

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(t)\,\varphi[\mu(t)+x]\,dt = f(x).$$

$K(t)$ és $\mu(t)$ adott függvények.

*Útmutatás:* Az **1520.** és **1521.** feladatnál alkalmazott módszer szerint oldható meg.

**1523.** Bizonyítsuk be, hogy a

$$f(x) - \lambda \int_a^b K(t)\, f[\mu(t)+x]\,dt = f^{(n)}(x)$$

integrálegyenlet megoldása $\varphi^{(n)}(x)$, ahol $\varphi(x)$ az **1522.** alatti integrálegyenlet megoldása.

Megjegyzés: Az állítást vö. az **1511.** feladat állításával.

## 1.6. Iterált magok, a rezolvens mag és a Fredholm-féle determináns általános tulajdonságai. A Fredholm-féle alternativatétel

A rezolvens mag mindig

$$R(P, Q; \lambda) = \frac{D(P, Q; \lambda)}{D(\lambda)} \qquad (1.6.1)$$

alakba írható, ahol bármely $P$ és $Q(\in \Omega)$ mellett $D(P, Q; \lambda)$ és $D(\lambda)$ a $\lambda$ transzcendens egész függvénye (ha a mag négyzetével együtt integrálható). E függvények explicit alakja:

$$D(P, Q; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(P, Q)\, \lambda^n \qquad (1.6.2)$$

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} c_n\, \lambda^n \qquad (1.6.3)$$

$B_0(P, Q) = K(P, Q)$;

$$B_n(P, Q) = \int\limits_{\Omega}^{(n)} \cdots \int\limits_{\Omega} \begin{vmatrix} K(P, Q) & K(P, P_1) & \dots & K(P, P_n) \\ K(P_1, Q) & K(P_1, P_1) & \dots & K(P_1, P_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(P_n, Q) & K(P_n, P_1) & \dots & K(P_n, P_n) \end{vmatrix} d\Omega_{P_1} \dots d\Omega_{P_n} \qquad (1.6.4)$$

$$c_0 = 1; \quad c_n = \int\limits_{\Omega} B_n(P, P)\, d\Omega_P \quad (n = 1, 2, \dots). \qquad (1.6.5)$$

A $D(\lambda)$ függvényt a $K$ mag FREDHOLM-*féle determinánsának* nevezzük. A $D(\lambda) = 0$ egyenlet megoldásai az $R(P, Q; \lambda)$ pólusait adják, ezek $P$ és $Q$ helyzetétől függetlenek. Ennek a $D(\lambda)$ transzcendens (vagy racionális) egész függvénynek a gyökei a $K$ mag sajátértékei.

Az

$$A_1 = \int\limits_{\Omega} K(P, P)\, d\Omega_P, \; \dots, \; A_n = \int\limits_{\Omega} K_n(P, P)\, d\Omega_P, \; \dots \qquad (1.6.6)$$

számokat a mag *nyomainak* hívjuk. Ezek segítségével a FREDHOLM-féle determináns

$$D(\lambda) = e^{-(\lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots + \lambda^n A_n + \dots)} \qquad (1.6.7)$$

alakba írható.

Az előbbiekből következik, hogy a sajátértékek száma legfeljebb megszámlálhatóan végtelen, ezek a végesben nem torlódhatnak. A sajátértékeket a jövőben általában úgy számozzuk meg, hogy

$$|\lambda_1| \leqq |\lambda_2| \leqq \dots \leqq |\lambda_n| \leqq \dots$$

legyen. Minden sajátértékhez csak véges sok lineárisan független sajátfüggvény tartozik. Ha egy sajátértékhez egynél több lineárisan független sajátfüggvény tartozik, akkor a sajátértékek rendezett sorozatába az illető sajátértéket annyiszor írjuk le, ahány független sajátfüggvény hozzá tartozik. Az egy sajátértékhez tartozó független sajátfüggvények számát a *sajátérték multiplicitásának* nevezzük.

A $K(P, Q)$ magból származtatott $K^*(P, Q) = K(Q, P)$ magot a $K$ adjungáltjának hívjuk. Ha $K \equiv K^*$, akkor a magot *szimmetrikusnak*, ha $K \equiv -K^*$, akkor *ferdén szimmetrikusnak* hívjuk. $K$ és $K^*$ sajátértékei ugyanazok.

A FREDHOLM-féle alaptételek. Ha $\Omega$ korlátos, $K(P, Q)$ négyzetével együtt integrálható, vagy iteráltjai léteznek, és elég magas indexű iteráltjai korlátosak, akkor igazak a következők:

I. Ha $\lambda$ *nem* gyöke a $D(\lambda) = 0$ egyenletnek, akkor a másodfajú integrálegyenletnek egy és csakis egy megoldása van bármely négyzetével együtt integrálható $f(P)$ zavaró függvény mellett. Ebből következik, hogy ilyen (ún. reguláris) $\lambda$ mellett a homogén másodfajú integrálegyenletnek csupán triviális megoldása létezik.

II. Ha $\lambda$ gyöke a $D(\lambda) = 0$ egyenletnek ($\lambda$ sajátérték), akkor a homogén integrálegyenletnek van a triviálistól különböző megoldása. Ekkor az inhomogén egyenletnek azonban *általában* (tetszőleges zavaró függvény mellett) nincs megoldása.

III. Ha $\lambda$ sajátértéke $K$-nak, akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az inhomogén integrálegyenletnek létezzék megoldása, az, hogy $f(P)$ ortogonális legyen a $K^*$ mag minden $\lambda$-hoz tartozó sajátfüggvényére. Ez esetben azonban az inhomogén integrálegyenletnek végtelen sok (de csupán véges sok lineárisan független) megoldása van.

*Feladatok*

1601. Korlátos mag esetén mutassuk meg, hogy

$$K_n(P, Q) = \int_\Omega K_r(P, T)\, K_{n-r}(T, Q)\, d\Omega_T,$$

ahol $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

1602. Bizonyítsuk be, hogy a négyzetesen integrálható $K$ mag esetén $K$ és $K^*$-nak ugyanazok a sajátértékei.

1603. Mutassuk meg, hogy $K$ és $K^*$ sajátfüggvényei biortogonális függvényrendszert alkotnak.

1604. Rögzített $Q$ mellett a

$$\varphi - \lambda \mathcal{K} \varphi = K(P, Q)$$

integrálegyenlet megoldása az $R(P, Q; \lambda)$ rezolvens mag, feltéve, hogy $\lambda$ nem sajátérték.

1605. Bizonyítsuk be, hogy a korlátos VOLTERRA-típusú magoknak nincs sajátértékük.

1606. Az $(a, b)$ véges intervallumban páronként ortogonális és 1-re normált $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ függvények segítségével képezzük a következő magot:

$$K(x, y) = \varphi_1(x)\, \varphi_2(y) + \varphi_2(x)\, \varphi_3(y) + \ldots + \varphi_{n-1}(x)\, \varphi_n(y).$$

Bizonyítsuk be, hogy $K(x, y)$-nak nincsenek sajátértékei.

1607. Bizonyítsuk be, hogy a rezolvens mag (1.4.4) alatti kifejezése (1.2.10)-be megy át, ha a mag elfajult.

1608. Bizonyítsuk be, hogy ha két magra

$$K_1 * K_2 = \int_\Omega K_1(P, T)\, K_2(T, Q)\, d\Omega_T = 0 \quad \text{és} \quad K_2 * K_1 = 0,$$

akkor a $K(P, Q) = K_1(P, Q) + K_2(P, Q)$ mag FREDHOLM-féle determinánsa

$$D(\lambda) = D_1(\lambda)\, D_2(\lambda),$$

ahol $D_i(\lambda)$ a $K_i$ mag FREDHOLM-determinánsa $(i = 1, 2)$.

Megjegyzés: Általában, ha $n$ magra $K_i * K_j = 0$ $(i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$, akkor a

$$K(P, Q) = K_1(P, Q) + K_2(P, Q) + \ldots + K_n(P, Q)$$

FREDHOLM-determinánsa

$$D(\lambda) = D_1(\lambda)\, D_2(\lambda) \ldots D_n(\lambda).$$

1609. Ha

$$K(x, y) = F(x, y) + G(x, y)$$

ahol $G * F = 0$ és $\lambda_0$ az $F$ egy sajátértéke, melyhez a $\varphi_0$ sajátfüggvény tartozik, bizonyítsuk be, hogy akkor $\lambda_0$ az $K$-nak is sajátértéke, melyhez tartozó egyik sajátfüggvény $\varphi_0$.

**1610.** Legyen $A$ és $B$ két mag, melyekre

$$A * B = 0.$$

A megfelelő rezolvenseket $R_A(P, Q; \lambda)$, illetve $R_B(P, Q; \lambda)$-val jelöljük. Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_\Omega R_A(P, T; \lambda)\, R_B(T, Q; \mu)\, d\Omega_T = 0,$$

tetszőleges $\lambda$ és $\mu$ reguláris érték mellett.

**1611.** Legyen

$$K = K_1 + K_2 + \ldots + K_n,$$

ahol

$$K_i * K_j = 0. \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Számítsuk ki az

$$(\mathcal{E} - \lambda\, \mathcal{K})\, \varphi = f$$

integrálegyenlet megoldását az

$$(\mathcal{E} - \lambda\, \mathcal{K}_i)\, \varphi_i = f$$

egyenletek megoldásainak segítségével.

**1612.** Hogyan kell a $\lambda$ számot megválasztani, hogy a

$$\varphi(x) - \int_a^b [A(x, y) + \lambda\, B(x, y)]\, \varphi(y)\, dy = f(x)$$

integrálegyenletnek egyértelmű megoldása legyen. $A$ és $B$ olyan magok, melyekre a FREDHOLM-féle tételek érvényesek.

**1613.** Bizonyítsuk be, hogy a

$$\varphi(x, y) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t, y)\, dt = a_1(x)\, b_1(y) + a_2(x)\, b_2(y) + \ldots + a_n(x)\, b_n(y)$$

integrálegyenlet $\varphi(x, y)$ megoldása elfajult függvény* [$K(x, y)$ magra érvényesek a FREDHOLM-féle tételek].

**1614.** Mutassuk meg azt, hogy ha valamely korlátos mag $n$-edik iteráltjára ($n \geqq 2$) a

$$K_n(x, y) \equiv K(x, y)$$

reláció érvényes, akkor $K$ elfajuló.

*Útmutatás:* Alkalmazzuk azt a tételt, hogy egy sajátértékhez csak véges sok sajátfüggvény tartozik.

**1615.** Írjuk fel azt FREDHOLM-tételeknek eleget tevő magot, melyre a

$$K_2(x, y) \equiv K(x, y)$$

azonosság érvényes.

**1616.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy korlátos mag az

$$a_1\, K(P, Q) + a_2\, K_2(P, Q) + \ldots + a_n\, K_n(P, Q) \equiv 0$$

egyenletnek tesz eleget állandó $a_1, a_2, \ldots, a_n$ együtthatók mellett, akkor $K$ elfajult.

* Azaz olyan alakú, mint az egyenlet jobb oldala.

*Útmutatás:* Alkalmazzuk az **1614.** feladat megoldásánál követett gondolatmenetet.

**1617.** Bizonyítsuk be, hogy ha $K$ ferdén szimmetrikus, azaz

$$K(P,Q) = -K(Q,P),$$

akkor $K_n(P,Q)$ szimmetrikus, ha $n$ páros, és ferdén szimmetrikus, ha $n$ páratlan.

**1618.** Igazoljuk, hogy ha a $K(x,y)$ mag rezolvense $R(x,y;\ \lambda)$, akkor

$$R^{(n)}(x,y;\ \lambda) = \frac{R\left(x,y;\ \lambda^{\frac{1}{n}}\right) + \varepsilon R\left(x,y;\ \varepsilon\lambda^{\frac{1}{n}}\right) + \ldots + \varepsilon^{n-1} R\left(x,y;\ \varepsilon^{n-1}\lambda^{\frac{1}{n}}\right)}{n\lambda^{1-\frac{1}{n}}},$$

ahol $R^{(n)}(x,y;\ \lambda)$ a $K$ mag $n$-edik iteráltjának rezolvensét, $\varepsilon$ pedig valamelyik $n$-edik egységgyököt jelenti.

**1619.** A $K(x,y)$ és $K_n(x,y)$ magok FREDHOLM-féle determinánsai legyenek $D(\lambda)$, illetve $D_n(\lambda)$. Bizonyítsuk be, hogy

$$D_n(\lambda^n) = D(\lambda)\, D(\varepsilon\lambda) \ldots D(\varepsilon^{n-1}\lambda).$$

($K_n$ a $K$ $n$-edik iteráltja, $\varepsilon$ valamelyik $n$-edik komplex egységgyök).

**1620.** Valamely $K(x,y)$ rezolvense legyen $R(x,y;\ \lambda)$. Bizonyítsuk be, hogy rögzített $\lambda$ mellett $R(x,y;\ \lambda)$ rezolvense $R(x,y;\ \lambda+\mu)$, feltéve persze, hogy $\lambda$ és $\lambda+\mu$ nem sajátértékek.

**1621.** Bizonyítsuk be, hogy

$$R_n(x,y;\ \lambda) = \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{\partial^{n-1} R(x,y;\ \lambda)}{\partial\lambda^{n-1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

**1622.** Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^n \ln D(\lambda)}{d\lambda^n} = \int_a^b R_n(x,x;\ \lambda)\,dx.$$

**1623.** Ha $\lambda$ és $\lambda+\mu$ nem sajátérték, igazoljuk, hogy akkor

$$\ln D(\lambda+\mu) = \ln D(\lambda) + \mu\int_a^b R(x,x;\ \lambda)\,dx + \frac{\mu^2}{2}\int_a^b R_2(x,x;\ \lambda)\,dx + \ldots +$$

$$+ \frac{\mu^n}{n}\int_a^b R_n(x,x;\lambda)\,dx + \ldots.$$

**1624.** Igazoljuk az alábbi azonosságot:

$$\frac{R(x,y;\ \lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} + \frac{R(x,y;\ \lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} + \frac{R(x,y;\ \lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} =$$

$$= \int_a^b\int_a^b R(x,u;\ \lambda_1)\, R(u,v;\ \lambda_2)\, R(v,y;\ \lambda_3)\,du\,dv.$$

1625. Bizonyítsuk be, hogy bármely mag FREDHOLM-féle determinánsa a nyomok segítségével a következő módon fejezhető ki:

$$D(\lambda) = 1 - \lambda A_1 + \frac{\lambda^2}{2!}\begin{vmatrix} A_1 & 1 \\ A_2 & A_1 \end{vmatrix} - \frac{\lambda^3}{3!}\begin{vmatrix} A_1 & 1 & 0 \\ A_2 & A_1 & 2 \\ A_3 & A_2 & A_1 \end{vmatrix} + \frac{\lambda^4}{4!}\begin{vmatrix} A_1 & 1 & 0 & 0 \\ A_2 & A_1 & 2 & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 & 3 \\ A_4 & A_3 & A_2 & A_1 \end{vmatrix} \mp \dots$$

$$\left(A_n = \int_\Omega K(P,P)\, d\Omega_P,\ n = 1, 2, \dots\right).$$

1626. Számítsuk ki a

$$K(x,y) = \begin{cases} x, & \text{ha } x < y \\ y, & \text{ha } y < x \end{cases} \qquad \Omega = [0, 1]$$

mag rezolvensét, FREDHOLM-féle determinánsát és sajátértékeit.

1627. A $K(x, y)$ mag rendelkezzék az alábbi tulajdonsággal:

$$\lim_{\xi \to x} \int_a^b [K(x,y) - K(\xi, y)]^2\, dy = 0$$

bármely $x \in (a, b)$-re. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges négyzetével együtt integrálható $f$ függvény esetén

$$g = \mathcal{K} f$$

folytonos az $(a, b)$ számközben.

1628. Legyen $K(x, y)$ valamely folytonos és parciális differenciálhányadosokkal bíró mag. Bizonyítsuk be, hogy a

$$K\begin{pmatrix} x_1\, x_2 \dots x_n \\ x_1\, x_2 \dots x_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, x_1) & K(x_1, x_2) & \dots & K(x_1, x_n) \\ K(x_2, x_1) & K(x_2, x_2) & \dots & K(x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n, x_1) & K(x_n, x_2) & \dots & K(x_n, x_n) \end{vmatrix}$$

determináns osztható a

$$\Delta = \prod_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^{n} (x_i - x_k)^2$$

kifejezéssel.

1629. Számítsuk ki a

$$K(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x \sin (\nu + 1) y}{\nu^2} \qquad \Omega = (0, \pi)$$

mag iteráltjait és bizonyítsuk be, hogy $K(x, y)$-nak nincsenek sajátértékei.

1630. Igazoljuk, hogy $D(x, y;\ \lambda_0)$ az

$$(\mathcal{E} - \lambda_0 \mathcal{K})\, \varphi = 0$$

homogén integrálegyenlet megoldása, ha $\lambda_0$ a $\mathcal{K}$ operátor sajátértéke.

1631. Legyen $K_1(x,y)$ és $K_2(x,y)$ két folytonos és szimmetrikus mag. Ezek VOLTERRA-típusú konvolúcióján a

$$K(x,y) = K_1 \circ K_2 = \int_x^y K_1(x,t)\, K_2(t,y)\, dt$$

függvényt értjük. Bizonyítsuk be, hogy $K_1 \circ K_2$ akkor és csak akkor szimmetrikus $x$ és $y$-ban, ha $K_1 \circ K_2 = -K_2 \circ K_1$.

1632. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ egy hatványsor, melynek konvergenciarádiusa 0-tól különböző. Legyen $K(x,y)$ egy tetszőleges korlátos VOLTERRA-típusú mag. Bizonyítsuk be, hogy az

$$F(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n K_n(x,y)$$

sor abszolút és egyenletesen konvergens $x$ és $y$-ban minden zárt tartományon.

1633. Határozzuk meg azt a $\lambda$ paramétertől függő $V(x,y;\lambda)$ VOLTERRA-típusú magot, mely az alábbi függvényegyenletnek tesz eleget:

$$V(x,y;\lambda) + V(x,y;\mu) + \int_x^y V(x,t;\lambda)\, V(t,y;\mu)\, dt = V(x,y;\lambda+\mu).$$

1634. Legyen $A(x,y)$ korlátos VOLTERRA-típusú mag. Oldjuk meg az alábbi a $K(x,y)$ VOLTERRA-típusú magra vonatkozó integrálegyenletet

$$K_2(x,y) + 2\,K(x,y) + A(x,y) = 0.$$

1635. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\int_x^y P(x-t)\, Q(t-y)\, dt$$

függvény csupán $(x-y)$-tól függ.

1636. Oldjuk meg az alábbi végtelenedrendű integrálegyenletet:

$$\Phi(x,y) = F(x,y) + \frac{F_2(x,y)}{2!} + \ldots + \frac{F_n(x,y)}{n!} + \ldots.$$

$\Phi$ adott folytonos, $F$ a keresett függvény. $F_n(x,y)$ jelenti $F$ VOLTERRA-féle iteráltjait.

*Útmutatás:* Alkalmazzuk az 1632. feladatban közölt elvet.

1637. Legyen $K(t)$ a $[0,1]$-ben differenciálható függvény, a $K(|x-y|)$ rezolvens magját jelöljük $R(x,y;\lambda)$-val. Bizonyítsuk be, hogy ez az alábbi relációnak tesz eleget:

$$\frac{\partial R(x,y;\lambda)}{\partial x} + \frac{\partial R(x,y;\lambda)}{\partial y} = \lambda \begin{vmatrix} R(x,0;\lambda) & R(x,1;\lambda) \\ R(1,y;\lambda) & R(0,y;\lambda) \end{vmatrix}.$$

*Útmutatás:* Induljunk ki a rezolvens magra jellemző integrálegyenletből (vö. az 1604. feladatot), differenciáljuk azt $x$, majd $y$ szerint. E két differenciálhányadost adjuk össze, nyerünk egy lineáris integrálegyenletet, melyet meg kell oldani.

1638. Legyen $K(t)$ a $[0, 1]$-ben differenciálható függvény. Bizonyítsuk be, hogy annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a $K(|x-y|)$ mag $R(x, y; \lambda)$ rezolvense a

$$\frac{\partial R(x, y; \lambda)}{\partial x} + \frac{\partial R(x, y; \lambda)}{\partial y} = 0$$

differenciálegyenletnek tegyen eleget az, hogy vagy

$$K(x) = K(1-x),$$

vagy pedig

$$K(x) = -K(1-x)$$

egyenlet minden $x$ $(\in [0, 1])$-re fennálljon.

*Útmutatás:* Vegyük figyelembe az **1637.** feladat eredményét, valamint annak megoldásánál a differenciálegyenlet bal oldalára nyert integrálegyenletet.

1639. Bizonyítsuk be azt, hogy ha egy korlátos sajátérték nélküli mag eleget tesz a

$$K_n(x, y) \equiv K(x, y) \qquad (n > 1)$$

függvényegyenletnek, akkor $K \equiv 0$.

1640. Legyen $K(x, y)$ VOLTERRA-típusú mag az $y < x$ tartományban.

$$K(x, y) = a_0(x) + a_1(x)(x-y) + \ldots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}$$

alakú, ahol az $a_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ együtthatók $x$ folytonos függvényei. Határozzuk meg e mag rezolvensét!

*Útmutatás:* Határozzuk meg azt az $u(x, y)$ függvényt, melynek $x = y$-ra az első $n-1$ deriváltja eltűnik, $(n-1)$-edik differenciálhányadosa $\lambda R(x, y; \lambda)$. Ezt vezessük be új ismeretlen függő változó gyanánt az **1604.** feladat eredményeképpen nyert függvényegyenletbe, és ha az abban szereplő integrálra a parciális integrálást alkalmazzuk, egy jól kezelhető differenciálegyenletet nyerünk az $u$ függvényre.

1641. Bizonyítsuk be, hogy egy szimmetrikus és definit mag szükségképpen zárt.

## 1.7. Közönséges és Schmidt-féle sajátértékek és sajátfüggvények. Sorbafejtési tételek

Az

$$(\mathcal{E} - \lambda \mathcal{K})\,\varphi = 0 \tag{1.7.1}$$

egyenlet azon megoldásai, melyek a $\|\varphi\| = 1$ feltételnek tesznek eleget, a $K$ mag *sajátfüggvényei*. Azok a $\lambda$ értékek, melyek mellett létezik sajátfüggvény, a $K$ mag sajátértékei. Ha a mag olyan, hogy rá a FREDHOLM-féle tételek érvényesek, akkor a $\lambda_n$ sajátértékek legfeljebb megszámlálható halmazt alkotnak, és a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \tag{1.7.2}$$

sor konvergens. Ha $\lambda_0$ a mag sajátértéke, melyhez tartozó sajátfüggvény $\varphi_0$, akkor $\lambda_0^n$ a mag $n$-edik iteráltjának sajátértéke, melyhez tartozó egyik sajátfüggvény $\varphi_0$. Vannak olyan magok, melyeknek nincsen sajátértékük, ilyenek például a VOLTERRA-típusú magok. Minden négyzetével együtt integrálható, korlátos tartományban értelmezett szimmetrikus magnak legalább egy sajátértéke van, ez valós, ha a mag valós.

A

$$\varphi = \mu \mathcal{K} \psi; \qquad \psi = \mu \mathcal{K}^* \varphi \tag{1.7.3}$$

integrálegyenlet-rendszer minden $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$ feltételnek eleget tevő megoldását SCHMIDT-*féle sajátfüggvénynek*, ezt a $\mu$ számot, mely mellett (1.7.3)-nak van nem-triviális megoldása SCHMIDT-*féle sajátértéknek* nevezzük. Ha az értelmezési tartomány korlátos, a mag négyzetével együtt integrálható, akkor SCHMIDT-féle sajátértékek és sajátfüggvények mindig léteznek. Valós magoknál $\mu$ mindig valós. Az

$$A(P, Q) = \int_\Omega K(P, T)\, K(Q, T)\, d\Omega_T, \text{ és } B(P, Q) = \int_\Omega K(T, P)\, K(T, Q)\, d\Omega_T \tag{1.7.4}$$

magoknak közös sajátértékük van, ezek a $K$ mag SCHMIDT-féle sajátértékeinek négyzetei. Az $A$ és $B$ magok sajátfüggvényei a $K$ mag SCHMIDT-féle sajátfüggvényei. Az (1.7.4) alatti magokat a $K$ maghoz *asszociált magoknak* nevezzük.

Valamely mag közönséges és SCHMIDT-féle sajátértékei általában különbözőek, és hasonlóképpen általában a kétféle sajátfüggvények sem azonosak.

Ha az (1.7.3) alatt szereplő $(\psi)$ függvényrendszer teljes, akkor a $K$ magot jobbról, ha a $(\varphi)$ rendszer teljes, akkor $K$-t balról zártnak nevezzük. Ha mindkét függvényrendszer teljes, akkor a $K$ mag zárt.

Szimmetrikus magoknál az asszociált magok egymással azonosak, és egyenlők a mag második iteráltjával, a közönséges és SCHMIDT-féle sajátfüggvények is azonosak.

A

$$g(P) = \mathcal{K} f = \int_\Omega K(P, Q)\, f(Q)\, d\Omega_Q \tag{1.7.5}$$

függvényt az $f(Q)$ függvénnyel *forrásszerűen előállított függvénynek* nevezzük. Ha $K$ négyzetével együtt integrálható és $\Omega$ korlátos, akkor a

$$g(P) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, \varphi_n(P) \qquad [c_n = (g, \varphi_n)] \tag{1.7.6}$$

sor abszolút, és egyenletesen konvergens. Érvényesek még az

$$A(P, Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(P)\, \varphi_n(Q)}{\mu_n^2}\,; \qquad B(P, Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(P)\, \psi_n(Q)}{\mu_n^2} \tag{1.7.7}$$

sorfejtések. Ezek a sorok is abszolút és egyenletesen konvergensek. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(P)\, \psi_n(Q)}{\mu_n} \tag{1.7.8}$$

sor általában azonban nem konvergens közönséges értelemben még folytonos magnál sem. Négyzetes középben azonban a $K(P, Q)$ maghoz konvergál. Ebből következik, hogy (1.7.8) konvergens, akkor összege a $K(P, Q)$ mag. Korlátos szimmetrikus mag esetén fennáll az alábbi reláció:

$$K_n(P, Q) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(P)\, \varphi_n(Q)}{\lambda_k^n}\,. \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{1.7.9}$$

A jobb oldalon álló sor abszolút és egyenletesen konvergens.

Az (1.7.6) sorfejtési tételnek fontos alkalmazása van az első fajú integrálegyenletek megoldására korlátos tartomány és négyzetesen integrálható mag esetén. Ennek felhasználásával ti. az adódik, hogy a

$$\mathcal{K} \varphi = 0$$

első fajú integrálegyenletet kielégíti minden olyan függvény, mely $\mathcal{K}$ összes jobb oldali SCHMIDT-féle sajátfüggvényére ortogonális, és ezek kimerítik a szóban forgó egyenlet összes megoldását.

Ami a

$$\mathcal{K}\varphi = f$$

inhomogén integrálegyenletet illeti, arra vonatkozólag az említett tétel segítségével bebizonyítható az alábbi E. PICARD-tól származó exisztenciakritérium: ha a $K(x, y)$ és $f(x)$ valamely korlátos tartományban négyzetével együtt integrálhatók, akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az inhomogén első fajú integrálegyenlet (LEBESGUE szerint) négyzetével együtt integrálható függvénnyel megoldható legyen az, hogy

1°. $f(x)$ ortogonális legyen a $\mathcal{K}^* w = 0$ homogén integrálegyenlet minden $w$ megoldására;

2°. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 f_n^2$ konvergens legyen, ahol $\mu_n$ a $\mathcal{K}$ SCHMIDT-féle sajátértékeit, $f_n$ pedig az $(f, \varphi_n)$ FOURIER-együtthatókat jelenti, a $\varphi_n$-ek pedig a $\mathcal{K}$ bal oldali SCHMIDT-féle sajátfüggvényei.

1° és 2° teljesülése esetén az egyenlet egyik partikuláris megoldása

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n f_n \varphi_n(x). \tag{1.7.10}$$

Ha $\mathcal{K}$ jobb oldali SCHMIDT-féle sajátfüggvényrendszere zárt, akkor az inhomogén egyenletnek lényegében csak egy megoldása van (persze 1° és 2° teljesülése esetén).

A $K(P, Q)$ szimmetrikus mag sajátértékei az alábbi minimumtulajdonsággal bírnak:

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \max_{\|\varphi\|=1} |(\mathcal{K}\varphi, \varphi)|.$$

A jobb oldal a maximumot akkor éri el, ha $\varphi$ helyébe a $\lambda_1$-hez tartozó bármelyik sajátfüggvényt behelyettesítjük. A magasabb indexű sajátértékek pedig az alábbi szélsőérték-tulajdonsággal bírnak:

$$\frac{1}{|\lambda_n|} = \max |(\mathcal{K}\varphi, \varphi)|.$$

$\|\varphi\| = 1;\ (\varphi_1, \varphi) = (\varphi_2, \varphi) = \ldots = (\varphi_{n-1}, \varphi) = 0$ mellékfeltételek mellett. Ez egyenértékű a következővel: Képezzük a

$$G_n(P, Q) = K(P, Q) - \frac{\varphi_1(P)\,\varphi_1(Q)}{\lambda_1} - \ldots - \frac{\varphi_{n-1}(P)\,\varphi_{n-1}(Q)}{\lambda_{n-1}}$$

magot, akkor

$$\frac{1}{|\lambda_n|} = \max_{\|\varphi\|=1} |(\mathcal{G}_n \varphi, \varphi)|.$$

Szimmetrikus mag abszolút értékben legkisebb sajátértékének numerikus meghatározására általában a következő eljárások használatosak.

*a)* **Ritz-módszer** Válasszunk egy tetszőleges ortonormált és teljes függvényrendszert $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$, és ezekből képezzük a

$$\varphi(x) = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \ldots + a_n \psi_n \tag{1.7.11}$$

polinomot. Ha konkurrens függvények gyanánt az (1.7.11) alakú polinomokat tekintjük, akkor

$$|(\mathcal{K}\varphi, \varphi)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} a_i a_j \right|, \tag{1.7.12}$$

ahol

$$A_{ij} = (\mathcal{K}\psi_i, \psi_j).$$

A módszer lényege abban áll, hogy megkeressük (1.7.12) maximumát a

$$\| \varphi \|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1 \qquad (1.7.13)$$

mellékfeltétel mellett. Ez egy $n$ változós függvény feltételes szélsőérték-meghatározásának problémája. Ha a $K$ mag négyzetével együtt integrálható, akkor e szélső érték limese, midőn $n \to \infty$, $K$-nak, abszolút értékben legkisebb sajátértéke. Ha $K$ valós, a $\{\psi\}$ rendszer választható valósnak, és elég valós $a_i$ együtthatókra szorítkozni. Ha még azt is tudjuk, hogy $K$ pozitív definit, akkor a számítás különösen egyszerű, mert (1.7.12) helyett

$$F = |(\mathcal{K}\varphi, \varphi)| = (\mathcal{K}\varphi, \varphi) = \sum_{(i,j)} A_{ij}\, a_i\, a_j$$

írható, és ennek szélső értéke (1.7.13) mellékfeltétel mellett a LAGRANGE multiplikátor módszerrel nyerhető. Legyen

$$\Phi = F - \sigma \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

amiből

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0, \text{ vagy } \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\, a_k - \sigma\, a_i = 0. \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1.7.14)$$

(1.7.13) miatt az összes $a_i$ nem lehet zérus, tehát (1.7.14) csak úgy állhat fenn, ha

$$|\mathbf{A} - \sigma \mathbf{I}| = 0, \qquad (1.7.15)$$

ahol

$$\mathbf{A} = (A_{ik}).$$

Az (1.7.15)-ből kiszámított $\sigma$ szolgáltatja a keresett sajátérték közelítő kifejezését, (1.7.14)-ből meghatározott $a_i$ együtthatókkal képezett

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, \psi_i(P)$$

függvény pedig a $\sigma$-hoz tartozó sajátfüggvény közelítő kifejezését.

### b) A nyomok módszere

Be lehet bizonyítani, hogy

$$\lambda_1^2 = \lim_{m\to\infty} \frac{A_{2m}}{A_{2m+2}},$$

ahol $A_m$ a mag nyomait jelentik. Ebből

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}. \qquad (1.7.16)$$

Előjellel együtt szolgáltatja az abszolút értékben legkisebb sajátértéket a

$$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n+1]{A_{2n+1}}}$$

formula. Ebből

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[2n+1]{A_{2n+1}}}. \qquad (1.7.17)$$

c) Kellog-módszere | Legyen $w$ egy tetszőleges függvény, és képezzük a függvények következő sorozatát

$$w_1 = \mathcal{K} w, \quad w_2 = \mathcal{K} w_1, \quad \ldots, \quad w_n = \mathcal{K} w_{n-2}, \quad \ldots$$

Ha $\mathcal{K} w \not\equiv 0$, akkor a

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\| w_n \|}} \tag{1.7.18}$$

szám létezik, és $\mathcal{K}$ egyik sajátértékét adja. Ugyancsak létezik a

$$\varphi = \lim_{n \to \infty} \frac{w_{2n}(x)}{\| w_{2n} \|} \tag{1.7.19}$$

határfüggvény is, mely az imént meghatározott sajátértékhez tartozó sajátfüggvényt adja. Ennek az eljárásnak az a hátránya, hogy nem ad felvilágosítást arra nézve, hogy melyik sajátfüggvényt, illetve sajátértéket határozza meg.

*Feladatok*

1701. Melyik az a szimmetrikus mag, melynek sajátfüggvényei és sajátértékei

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n x; \quad \lambda_n = n^2. \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

1702. Legyen $\varphi_n(P)$ egy korlátos, szimmetrikus mag sajátfüggvényrendszere. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(P)^2}{\lambda_n^2}$$

sor egyenletesen konvergens ($\lambda_n$ a $\varphi_n$-hez tartozó sajátérték !).

1703. Igazoljuk, hogy a ferdén szimmetrikus valós mag $[K(P, Q) = -K(Q, P)]$ minden sajátértéke tiszta képzetes szám.

1704. Igazoljuk, hogy ha egy ferdén szimmetrikus valós mag sajátértéke $\lambda$, a hozzá tartozó sajátfüggvény $\varphi$, akkor $\mu = -i\lambda$ a mag Schmidt-féle sajátértéke, melyhez tartozó Schmidt-féle sajátfüggvénypár

$$\operatorname{Re} \varphi, \quad -\operatorname{Im} \varphi.$$

1705. Legyen $K(t)$ négyzetével együtt integrálható, és 1 szerint periodikus függvény. Bizonyítsuk be, hogy a $\varphi_n(x) = e^{2\pi i n x}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ függvények a $K(x - y)$ mag sajátfüggvényei. Számítsuk ki a hozzájuk tartozó sajátértékeket !

1706. Legyen $K(t) = |t|$, ha $-\pi \leqq t \leqq \pi$ és $K(t + 2\pi) = K(t)$. Számítsuk ki a $K(x - y)$ mag sajátértékeit és sajátfüggvényeit.

1707. Legyen $K(t) = \dfrac{\pi - t}{2}$, ha $0 \leqq t < 2\pi$ és $K(t + 2\pi) = K(t)$. Állapítsuk meg a $K(x - y)$ mag Schmidt-féle sajátértékeit és sajátfüggvényeit, valamint $K(x - y)$ adjungált magjait !

**1708.** Oldjuk meg az alábbi homogén integrálegyenlet-rendszert:

$$\varphi(x) = \mu \int_0^1 (x - y)\, \psi(y)\, dy; \qquad \psi(x) = \mu \int_0^1 (y - x)\, \varphi(y)\, dy.$$

**1709.** Legyen $K(t)$ a $[0, 1]$-ben folytonos és differenciálható függvény, mely a $K(t) = -K(1 - t)$ feltételeknek tesz eleget. Számítsuk ki a $K(|x - y|)$ mag sajátfüggvényeit és sajátértékeit.

*Útmutatás:* Használjuk fel azt, hogy a homogén integrálegyenlet minden megoldása a sajátfüggvények lineáris kombinációja

**1710.** Legyen

$$K(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad x < y \\ +\dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad x > y \end{cases} \qquad \Omega = [0, 1].$$

Állapítsuk meg e mag $\mu = \pi$ értékhez tartozó SCHMIDT-féle sajátfüggvényeit.

**1711.** Legyen

$$K(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq y \leqq 1 \\ 1, & \text{ha} \quad 0 \leqq y \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

Határozzuk meg $K$-hoz tartozó asszociált magokat, SCHMIDT-féle sajátértékeit és sajátfüggvényeit.

**1712.** Igazoljuk, hogy a ferdén szimmetrikus magnak van legalább egy sajátértéke.

**1713.** Legyen $K(x, y)$ korlátos, nem azonosan eltűnő szimmetrikus mag. Bizonyítsuk be, hogy az

$$L(x, y) = P(y)\, K(x, y)$$

nem szimmetrikus magnak van legalább egy valós sajátértéke, $P(y)$ nem-negatív függvény.

**1714.** Mutassuk meg, hogy az

$$L(x, y) = K(x, y)\, P(y) \qquad [K(x, y) = K(y, x)]$$

mag minden iteráltja a következő alakú:

$$L_n(x, y) = G^{(n)}(x, y)\, P(y),$$

ahol $G^{(n)}$ szimmetrikus függvény.

**1715.** Legyen $\lambda$ az **1713.** alatt szereplő mag egy sajátértéke, ehhez tartozó sajátfüggvény $\varphi$. Mutassuk meg, hogy $P(x)\,\varphi(x)$ az $L^*(x, y) = L(y, x)$ mag sajátfüggvénye.

**1716.** Keressük meg azt a valós $K(x, y)$ szimmetrikus magot, melynek $n$-edik iteráltja adott:

$$K_n(x, y) = A(x, y) \qquad (n \geqq 2)$$

($A$ szimmetrikus mag.)

*Útmutatás:* Induljunk ki egy szimmetrikus mag $n$-edik iteráltjának sajátértékeire vonatkozó tételből, és alkalmazzuk (I.7.2)-t.

**1717.** Határozzuk meg azt a $K(x, y)$ szimmetrikus, korlátos függvényt, mely eleget tesz az alábbi függvényegyenletnek:

$$K_2(x, y) + K(x, y) = A(x, y).$$

$A(x, y)$ adott, szimmetrikus valós mag.

*Útmutatás:* a megoldás módszere megegyezik az 1716. feladat megoldási módszerével.

**1718.** Legyenek $P(x, y)$ és $Q(x, y)$ valós, szimmetrikus, korlátos magok, melyeknek azonos sajátfüggvényrendszerük van. Adjunk meg egy elégséges feltételt arra nézve hogy a

$$K_2(x, y) + \int_a^b P(x, t)\, K(t, y)\, dt = Q(x, y)$$

egyenlet megoldható legyen.

*Útmutatás:* Keressünk olyan szimmetrikusmag-megoldást, melynek sajátfüggvényrendszere megegyezik $P$ és $Q$ sajátfüggvényrendszerével.

**1719.** Legyen $K(x, y)$ tetszőleges korlátos, szimmetrikus mag. Bizonyítsuk be, hogy

$$R(x, y; \lambda) - K(x, y) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\, \varphi_n(y)}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)},$$

s a jobb oldalon álló sor abszolút és egyenletesen konvergens, ha $\lambda$ nem sajátérték.

*Útmutatás:* Az $R$ rezolvens magra jellemző függvényegyenletből (vö. az 1604. feladattal) állapítsuk meg $R - K$ sajátértékeit, és alkalmazzuk a forrásszerűen előállított függvény sorfejtésére vonatkozó tételt.

**1720.** Bizonyítsuk be, hogy a

$$(\mathcal{E} - \lambda\, \mathcal{K})\, \varphi = f$$

általában nem szimmetrikus magú integrálegyenlet ekvivalens az alábbi szimmetrikus magú integrálegyenlettel:

$$(\mathcal{E} - \lambda\, \mathcal{P}_\lambda)\, \varphi = F_\lambda,$$

ahol

$$P(x, y; \lambda) = K(x, y) + K(y, x) - \lambda \int_a^b K(t, x)\, K(t, y)\, dt$$

és

$$F_\lambda = F(x; \lambda) = f(x) - \lambda \int_a^b K(t, x)\, f(t)\, dt,$$

feltéve, hogy $K$ olyan mag, melyre a FREDHOLM-féle alternatívatétel érvényes, és $\lambda$ a $K$-nak nem sajátértéke.

*Útmutatás:* Az adott egyenletre alkalmazzuk az $\mathcal{E} - \lambda\, \mathcal{K}^*$ operátort.

**1721.** Legyen $K(x, y)$ és $G(x, y)$ két korlátos mag. Bizonyítsuk be, hogy ha $\lambda$ a $G$ (vagy $K$) mag sajátértéke, akkor sajátértéke a

$$P(x, y; \lambda) = K(x, y) + G(x, y) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, G(t, y)\, dt$$

magnak is, és $G$-nek $\lambda$-hoz tartozó sajátfüggvénye azonos $P$-nek $\lambda$-hoz tartozó sajátfüggvényével. És fordítva: ha $\lambda$ a $P(x, y; \lambda)$ sajátértéke, akkor sajátértéke vagy $K$, vagy a $G$ magnak is.

1722. Bizonyítsuk be, hogy a

$$I = \int_a^b \int_a^b [K(x, y) - \varphi(x)\,\psi(y)]^2\,dx\,dy$$

integrál akkor a legkisebb, ha $\varphi$ és $\psi$ a $K$ mag ugyanazon SCHMIDT-féle sajátértékhez tartozó SCHMIDT-féle sajátfüggvényei.

1723. Számítsuk ki

$$\sigma = \max_{\|\varphi\|=1} \left| \int_0^1 \int_0^1 \left( x y - \frac{x+y}{3} + \frac{1}{3} \right) \varphi(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy \right|$$

értékét.

*Útmutatás:* alkalmazzuk az (1.7.10) alatti tételt.

1724. Számítsuk ki a

$$K(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{i\vartheta}}{e^{i\vartheta} - r\,e^{i\varphi}} \qquad (0 \leqq \vartheta,\ \varphi \leqq 2\pi;\ 0 < r < 1)$$

mag sajátértékeit és sajátfüggvényeit.

*Útmutatás:* Alkalmazzuk az 1705. feladat állítását.

1725. Bizonyítsuk be, hogy ha egy korlátos mag $n$-edik iteráltjának sajátértéke $\nu^n$, a hozzátartozó sajátfüggvény $\varphi$, akkor a $\nu$, $\varepsilon\,\nu$, ..., $\varepsilon^{n-1}\,\nu$ számok közül legalább az egyik a $K$ mag sajátértéke, a

$$\Pi_p(x) = \varphi(x) - \nu\,\varepsilon^p \int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt + \ldots \pm \nu^{n-1}\,\varepsilon^{(n-1)} \int_a^b K_{n-1}(x, t)\,\varphi(t)\,dt$$

függvények közül legalább az egyik a mag sajátfüggvénye.

1726. Legyenek $A(x, y)$ és $B(x, y)$ felcserélhető magok, azaz

$$A*B = B*A. \qquad \left(A * B = \int_a^b A(x, t)\,B(t, y)\,dt\right).$$

Legyen továbbá $\lambda$ az $A$ mag egyik sajátértéke, melyhez tartozó egyik sajátfüggvény $\varphi$. Ha

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b B(x, t)\,\varphi(t)\,dt,$$

akkor bizonyítsuk be, hogy csak két eset lehetséges:

*a)* $\psi(x)$ $A$-nak $\lambda$-hoz tartozó egyik sajátfüggvénye, vagy

*b)* $\psi(x) \equiv 0$.

1727. Legyen a korlátos $K$ mag sajátértéke $\lambda$. Rendeljük az

$$f(x) = a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$$

polinomhoz az

$$F(x, y) = a_1 K(x, y) + a_2 K_2(x, y) + \ldots + a_n K_n(x, y)$$

magot. Bizonyítsuk be, hogy $1/f(1/\lambda)$ az $F$ mag sajátértéke, feltéve persze, hogy $f(1/\lambda) \neq 0$.

**1728.** $A(x, y)$ és $B(x, y)$ legyenek pozitív és korlátos magok, legyen továbbá

$$A(x, y) \leqq B(x, y).$$

Bizonyítsuk be, hogy $\lambda_a \geqq \lambda_b$, ahol $\lambda_a$ és $\lambda_b$ az $A$, illetve $B$ mag legkisebb sajátértéke.

**1729.** Bizonyítsuk be, hogy minden folytonos, pozitív $K(x, y)$ magnak van legalább egy sajátértéke.

**1730.** $K(x, y)$ pozitív, szimmetrikus és folytonos magról bizonyítsuk be, hogy abszolút értékben legkisebb sajátértéke pozitív, a hozzátartozó sajátfüggvény is pozitív.

**1731.** Határozzuk meg a

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \ln |\cos x - \cos y| \qquad (0 \leqq x, y < \pi, \ x \neq y)$$

mag sajátfüggvényeit és sajátértékeit.

**1732.** Számítsuk ki a

$$K(s, t) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin \frac{s-t}{2}}{\sin \frac{s+t}{2}} \right| \qquad (0 \leqq s, t \leqq \pi, \ s \neq t)$$

mag sajátértékeit és sajátfüggvényeit.

**1733.** Mutassuk meg, hogy a

$$\varphi(x) = \lambda \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-|x-t|} \varphi(t) \, dt$$

integrálegyenletet kielégítik a $\varphi(x) = e^{i\alpha x}$ függvények ($\alpha$ valós), $\lambda > \frac{1}{2}$ mellett.

**1734.** Határozzuk meg a RITZ-módszerrel

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} x(2 - y), & \text{ha} \quad x \leqq y \\ \frac{1}{2} y(2 - x), & \text{ha} \quad y \leqq x \end{cases} \qquad \Omega = [0, 1]$$

mag legkisebb sajátértékét.

*Útmutatás:* Legyen $\psi_k = \sqrt{2} \sin k \pi x$ $(k = 1, 2, \ldots)$ és végezzük el a számítást $n = 2$ és $n = 3$ esetre.

**1735.** Számítsuk ki az **1734.** alatt szereplő mag legkisebb sajátértékét a nyomok módszere segítségével.

**1736.** Határozzuk meg az **1734.** alatt szereplő mag legkisebb sajátértékét a KELLOGG-módszerrel.

*Útmutatás:* A kiindulási függvényt, $\omega(x)$-et válasszuk $x$-nek. Legyen a számítás során $n = 3$.

**1737.** Oldjuk meg az alábbi homogén, első fajú integrálegyenletet:

$$\int_0^{2\pi} K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0,$$

ahol

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin (n+1)y}{n^2}.$$

**1738.** Keressük az

$$\int_0^{2\pi} K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 4 - x^4$$

inhomogén integrálegyenlet megoldásait, ahol $K(x, y)$ az **1737.** feladatban szereplő mag.

**1739.** Mi a megoldása az

$$\int_0^{2\pi} K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = \frac{\pi - x}{2}$$

inhomogén első fajú integrálegyenletnek, ahol $K(x, y)$ az **1737.** feladatban szereplő magot jelenti.

**1740.** Oldjuk meg az alábbi integrálegyenletet:

$$\int_0^{2\pi} K(x - y)\, \varphi(y)\, dy = |\sin x|,$$

ahol $K(t) = \dfrac{\pi - t}{2}$ $(0 \leqq t < 2\pi)$ és $K(t + 2\pi) = K(t)$.

*Útmutatás:* Használjuk fel az **1707.** feladat eredményét!

**1741.** Oldjuk meg az

$$\int_0^{1} y^{x-1}\, \varphi(y)\, dy = f(x)$$

első fajú integrálegyenletet.

*Útmutatás:* Az ismeretlen függvény momentumai az egyenletből leolvashatók. Ezek segítségével képezzük az $\{y^{(n)}\}$ függvényrendszerből a $(0, 1)$-ben ortonormált függvényrendszerre vonatkozó FOURIER-együtthatókat.

**1742.** Igazoljuk, hogy a

$$\varphi(x) = \int_0^{x} t^{x-t}\, \varphi(t)\, dt \qquad (x > 0)$$

homogén VOLTERRA-típusú integrálegyenlet sajátfüggvénye:

$$\varphi(x) = k\, x^{x-1}. \qquad (k \text{ konstans})$$

Nincs ellentétben ez az állítás azzal az ismert tétellel, hogy a VOLTERRA-féle magnak nincsen sajátértéke?

**1743.** Határozzuk meg a

$$\varphi(x) = \lambda \int_x^\infty \frac{(t-x)^n}{n!} \varphi(t)\, dt$$

egyenlet sajátértékeit és sajátfüggvényeit. ($n$ nem-negatív egész.)

**1744.** Keressük meg a

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right) \varphi(t)\, dt$$

sajátértékeit.

**1745.** Bizonyítsuk be, hogy $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ a $\sin xy$ mag sajátértéke a $(0, \infty)$ intervallumban.

*Útmutatás:*

$$\int_0^\infty e^{-ay} \sin xy\, dy = \frac{x}{a^2+x^2} \quad \text{és} \quad \int_0^\infty \frac{y}{a^2+y^2} \sin xy\, dy = \frac{\pi}{2} e^{-ax}.$$

**1746.** Legyen $P_n(x)$ az $n$-edik LEGENDRE-polinom. Az $0(0, 0, 0)$ középpontú, egységsugarú gömb két pontja legyen $P$ és $Q$. Igazoljuk, hogy

$$P_n [\cos (\widehat{POQ})] = \frac{4\pi}{2n+1} [S_{n1}(P) S_{n1}(Q) + \ldots + S_{n,2n+1}(P) S_{n,2n+1}(Q)]$$

Az $S_{ni}(P)$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n+1)$ függvények az $n$ indexhez tartozó ortonormált gömbfelületi függvények.

*Útmutatás:* A $K(P, Q) = P_n(\cos \widehat{POQ})$ magnak bármely gömbfelületi függvény sajátfüggvénye és csak ezek a sajátfüggvényei.

**1747.** Határozzuk meg a

$$K(P, Q) = \cos^n \widehat{POQ}$$

mag sajátfüggvényeit és sajátértékeit. $n$ természetes egész, $P$ és $Q$ az $O$ középpontú gömbfelület pontjai.

*Útmutatás:* Fejezzük ki $x^n$-t LEGENDRE-polinomok lineáris kombinációjaként, és alkalmazzuk az **1746.** feladat állítását.

# II. RÉSZ. INTEGRÁLEGYENLETEK ALKALMAZÁSAI

## 2.1. Közönséges, lineáris differenciálegyenletek peremérték-feladatai. Egydimenziós Green-függvény

Tekintsük az $[a, b]$ véges számközön értelmezett

$$L[y] \equiv \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\, y^{(k)}(x) \qquad (2.1.1)$$

$n$-ed rendű differenciálkifejezést és mindazokat az $y$ függvényeket, melyek az alábbi alakú homogén peremfeltételeknek tesznek eleget:

$$P_k[y] \equiv \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_k^{(i)} y^{(i)}(a) + \beta_k^{(i)} y^{(i)}(b)] = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2.1.2)$$

A (2.1.1)-ben szereplő $f_k(x)$ együtthatókról tegyük fel, hogy azok valósak és $[a, b]$-ben folytonos függvények, továbbá $f_n(x) \neq 0$.

$L[y]$-nak a (2.1.2) peremfeltételhez tartozó GREEN-függvényén értjük az alábbi tulajdonságokkal bíró kétváltozós $G(x, t)$ függvényt:

1°. $G(x, t)$ az $\Omega_1 : (a \leqq x < t \leqq b)$ és $\Omega_2 : (a \leqq t < x \leqq b)$ háromszög alakú tartományokban $x$ szerint $n$-szer parciálisan differenciálható, és e parciális differenciálhányadosok $\Omega_1$ és $\Omega_2$ tartományban mind $x$, mind $t$ szerint folytonosak.

2°. $L[G(x, t)] = 0$ rögzített $t \in [a, b]$ mellett az $\Omega_1$ és $\Omega_2$ tartományokban.

3°. $G(x, t)$ az $\Omega_1 + \Omega_2$ tartományban folytonos és $x$ szerint $(n-2)$-szer parciálisan differenciálható. E parciális differenciálhányadosak az $x$ és $t$ változóban folytonosak

4°. $$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(t+0, t) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(t-0, t) = \frac{1}{f_n(t)} \cdot \qquad (a < t < b)$$

5°. $$P_k[G(x, t)] = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

bármely rögzített $t \in [a, b]$ mellett.

A GREEN-függvény explicit módon a következőképpen határozható meg: tekintsük az

$$L[y] = 0$$

homogén differenciálegyenletnek $n$ olyan integrálját: $y_1, y_2, \ldots, y_n$-et, melyeknek WRONSKI determinánsa nem tűnik el $(a, b)$-ben:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (a < x < b).$$

Ezek után megoldjuk a következő algebrai egyenletrendszert:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i^{(k)}(x) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-2)\,; \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i^{(m-1)}(x) = \frac{1}{f_n(x)}\,.$$

Az $y_i$ függvényekről tett feltevés miatt ennek az egyenletrendszernek létezik egyértelmű megoldása: $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$. Ha feltesszük, hogy

$$\det P_k(y_i) \neq 0,$$

akkor a

$$\sum_{i=1}^{n} b_i\, P_k(y_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} c_i(x)\, \alpha_k^{(j)}\, y_i^{(j)}(a) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

egyenletrendszer is egyértelműen megoldható. Végezetül az

$$a_k(x) = b_k(x) - c_k(x)$$

jelölést használva, a keresett GREEN-függvény explicit alakja a következő:

$$G(x, t) = \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(t)\, y_\nu(x), & \text{ha} \quad a \leqq x \leqq t \leqq b \\ \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu(t)\, y_\nu(x), & \text{ha} \quad a \leqq t \leqq x \leqq b. \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy az $f_k$ együtthatók $n$-szer folytonosan differenciálhatók. Legyen $M$ az $L$ adjungált operátora. Ezt a következőképpen definiáljuk:

$$M[y] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, [f_k(x)\, y(x)]^{(k)}. \tag{2.1.3}$$

Ha $u$ és $v$ két tetszőleges, $n$-szer folytonosan differenciálható függvény, akkor érvényes a következő ún. LAGRANGE-*féle identitás:*

$$v\,L[u] - u\,M[v] = \frac{d}{dx}\left(\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{p+q=r} (-1)^p\, u^{(q)}(x)\, [f_{r+1}(x)\, v(x)]^{(p)}\right).$$

Ebből adódik az ún. GREEN-*féle azonosság*

$$\int_a^b (v\,L[u] - u\,M[v])\, dx = \left[\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{p+q=r} (-1)^p\, u^{(q)}(x)\, [f_{r+1}(x)\, v(x)]^{(p)}\right]_a^b.$$

Legyenek $\alpha_k^{(i)}$ és $\beta_k^{(i)}$ olyan tetszőleges számok ($k = n+1, n+2, \ldots 2n$), hogy

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{(0)} & \ldots & \alpha_n^{(0)} & \alpha_{n+1}^{(0)} & \ldots & \alpha_{2n}^{(0)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{(n-1)} & \ldots & \alpha_n^{(n-1)} & \alpha_{n+1}^{(n-2)} & \ldots & \alpha_{2n}^{(n-1)} \\ \beta_1^{(0)} & \ldots & \beta_n^{(0)} & \beta_{n+1}^{(0)} & \ldots & \beta_{2n}^{(0)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_1^{(n-1)} & \ldots & \beta_n^{(n-1)} & \beta_{n+1}^{(n-1)} & \ldots & \beta_{2n}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

legyen, ahol $\alpha_k^{(i)}$ és $\beta_k^{(i)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 0, 1, \ldots, n-1)$ a (2.1.2) alatti kezdeti feltételekben szereplő számok. Oldjuk meg a

$$P_k = \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_k^{(i)} u^{(i)}(a) + \beta_k^{(i)} u^{(i)}(b)] \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n)$$

$u^{(i)}(a)$ és $u^{(i)}(b)$ számára lineáris egyenletrendszert. Ha e megoldásként nyert mennyiségeket a GREEN-identitásba behelyettesítjük, a következő alakú kifejezést kapjuk:

$$\int_a^b (v\, L[u] - u\, M[v])\, dx = P_1 Q_{2n} + P_2 Q_{2n-1} + \ldots + P_{2n} Q_1,$$

ebben a $Q_k$ mennyiségek a $v(a), v'(a), \ldots, v^{(n-1)}(a), v(b), v'(b), \ldots, v^{(n-1)}(b)$ lineáris kifejezései.

Ha $\det | P_k[y_i] | \neq 0$, akkor az

$$L[y] = f(x) \tag{2.1.4}$$

$n$-ed rendű lineáris differenciálegyenletnek egy és csakis egy, a (2.1.2) peremfeltételeket kielégítő integrálja van, mely explicit alakban a következő módon írható:

$$y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t)\, dt. \tag{2.1.5}$$

Az

$$M[y] = f(x); \quad Q_k[y] = 0$$

peremértékfeladatot a (2.1.4) peremértékfeladat *adjungált feladatának* nevezzük. Ha az $M[y]$ differenciálkifejezés $Q_k[y] = 0$ peremfeltételhez tartozó GREEN-függvényét $H(x, t)$-vel jelöljük, akkor érvényes a következő reláció

$$H(x, t) = G(t, x) = G^*(x, t).$$

Ha a szóban forgó differenciálforma olyan, hogy bármely $n$-szer differenciálható függvényre

$$L[y] = M[y],$$

akkor azt mondjuk, hogy $L$ *önadjungált differenciálkifejezés.* Ilyennek a GREEN-függvénye az előbb mondottak szerint szimmetrikus:

$$G(x, t) = G(t, x).$$

Az eddigiekből következik, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy $L[y]$ lineáris differenciálformának a (2.1.2) alakú homogén peremfeltételekhez tartozó GREEN-függvénye létezzék az, hogy létezzenek az $L[y] = 0$ differenciálegyenletnek olyan alapmegoldásai, melyre

$$\det | P_k[y_i] | \neq 0. \tag{2.1.6}$$

Ez más szóval azt jelenti, hogy $L[y]$-nak a mondott peremfeltételekhez tartozó GREEN-függvénye akkor és csak akkor létezik, ha az $L[y] = 0$ és $P_k[y] = 0$ feltételeknek eleget tevő függvény csupán az $y(x) \equiv 0$. Ha ez utóbbi feltételeknek eleget tesz egy nem azonosan eltűnő függvény, akkor a (2.1.6) bal oldalán szereplő determináns eltűnik, és GREEN-függvény nem létezik. Ez esetben létezik azonban egy más, *ún. általánosított* GREEN-*függvény*, $\Gamma(x, t)$, mely hasonló szerepet játszik, mint az imént definiált $G(x, t)$. Általánosított GREEN-függvényen olyan függvényt értünk, mely a $G$-re kirótt 1°, 3°, 4° és 5° feltételeknek eleget tesz, a 2° tulajdonság helyett a következő sajátsággal rendelkezik:

2*°. $\Gamma(x, t)$ rögzített $t$ mellett az $\Omega_1$ és $\Omega_2$ háromszögtartományokban kielégíti az

$$L[y] = -\sum^{k} \Phi_\nu(t)\, v_\nu(t)$$

differenciálegyenlet. $v_1, v_2, \ldots, v_k$ függvények a szóban forgó peremérték-feladat adjungált feladatának egy lineárisan független megoldásrendszerét képezik, $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$ függvények pedig tetszőleges, az előbbire biortogonális függvények:

$$(\Phi_i, v_j) = \delta_{ij}.$$

Ebben az esetben a (2.1.4)-nek az a megoldása, mely a (2.1.2) peremfeltételeket kielégíti — ha ilyen egyáltalában létezik — a következő alakban írható:

$$y(x) = \int_a^b \Gamma(x, t) f(t)\, dt. \tag{2.1.7}$$

Nem nehéz az eddigiekből megállapítani, hogy hogyan lehet hasznosítani az integrálegyenletek elméletét peremérték-feladatok megoldására. Tekintsük a következő sajátértékfeladatot:

$$L[y] - \lambda g(x) y(x) = f(x); \quad P_k[y] = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.1.8}$$

Ha $G(x, t)$ az $L[y]$-nak az adott homogén peremfeltételekhez tartozó GREEN- (vagy általánosított GREEN-) függvénye, akkor (2.1.4) [illetve (2.1.7)] alapján (2.1.8) megoldása eleget tesz az alábbi FREDHOLM-típusú másodfajú lineáris integrálegyenletnek:

$$y(x) - \lambda \int_a^b G(x, t) g(t) y(t)\, dt = \int_a^b G(x, t) f(t)\, dt = F(x). \tag{2.1.9}$$

Be lehet bizonyítani, hogy (2.1.8) és (2.1.9) egyenértékűek.

Ha $g(t)$ korlátos, és legfeljebb véges sok ugráshelye van, akkor a $G(x, t)g(t)$ magnak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok sajátértéke van, vagyis a (2.1.8) alatti *homogén* feladatnak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok $\lambda$ sajátérték mellett van nem-triviális megoldása. Ha pedig $\lambda$ a $G(x, t)\, g(t)$ magnak nem sajátértéke, akkor a (2.1.8) inhomogén problémának egy és csakis egy megoldása létezik. Legyen $\lambda_0$ a (2.1.8) feladat valamely sajátértéke, akkor e mellett a $\lambda_0$ mellett a (2.1.8) inhomogén feladatnak megoldása akkor és csak akkor létezik, ha $f(x)$ az

$$M[z] - \lambda_0 g(x) z(x) = 0; \quad Q_k[z] = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.1.10}$$

adjungált probléma minden megoldására ortogonális. Az integrálegyenletek elméletéből következtethető az is, hogy a (2.1.8) alatti homogén problémának minden $\lambda$ sajátérték mellett csak véges sok lineárisan független megoldása létezik.

Ha $L[y]$ önadjungált, akkor $G(x, t)$ szimmetrikus, és ha még $g(t)$ pozitív is, akkor a $G(x, t)\, g(t)$ magnak létezik legalább egy valós sajátértéke (l. az **1713.** feladatot!). Sőt, a szóban forgó esetben végtelen sok sajátérték létezik. A $G(x, t)$ GREEN-mag $\varphi_i(x) = \sqrt{g(x)}\, y_i(x)$ sajátfüggvényei egy ortonormált és teljes rendszert alkotnak.

Fontos az a megállapítás is, hogy bármely $(n - 1)$-szer folytonosan differenciálható és a (2.1.2) homogén peremfeltételnek eleget tevő $y(x)$ függvény a $\varphi_i(x)$ függvények szerint haladó abszolút és egyenletesen konvergens FOURIER-sorba fejthető. Ha ti. $y$ ilyen függvény, akkor legyen $L[y] = \Phi$ és (2.1.4) alapján

$$y(x) = \int^b G(x, t)\, \Phi(t)\, dt.$$

Ez azt jelenti, hogy $y(x)$ mindig forrásszerűen előállítható, amiből állításunk következik.

A definíció értelmében a $G(x, t)$ GREEN-mag folytonos, így $K(x, t) = G(x, t)\, g(t)$ is folytonos, feltéve, hogy $g(t)$ az. Ha tehát $\sqrt{g(x)}\, G(x, t) \sqrt{g(t)}$ definit, akkor MERCER tétele értelmében

$$\sqrt{g(x)}\, G(x, t) \sqrt{g(t)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\, \varphi_i(y)}{\lambda_i} = \sqrt{g(x)} \sqrt{g(t)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i(x)\, y_i(t)}{\lambda_i},$$

azaz a

$$G(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i(x)\, y_i(t)}{\lambda_i}$$

sor abszolút és egyenletesen konvergens.

A felsorolt tételek és meggondolásaink akkor is igazak, ha az $(a, b)$ intervallum nem véges, vagy ha az $f_k(x)$ együtthatók az intervallum végpontjaiban eltűnnek.

## *Feladatok*

**2101.** Igazoljuk, hogy minden másodrendű önadjungált differenciálalak a következő módon írható fel:

$$L[y] = (p\,y')' - q\,y.$$

Írjuk fel az alábbi kifejezések GREEN-függvényeit:

**2102.** $L[y] \equiv y''$; $P_1[y] = y(0) = 0$; $P_2[y] = y(1) = 0$. Fejtsük a sajátfüggvények szerint haladó sorba a kapott GREEN-függvényt!

**2103.** $L[y] \equiv y''$; $P_1[y] = y(0) = 0$; $P_2[y] = y'(1) = 0$.

**2104.** $L[y] \equiv y''$; $P_1[y] = y(-1) = 0$; $P_2[y] = y(1) = 0$.

**2105.** $L[y] \equiv y''$; $P_1[y] = y(0) + y(1) = 0$; $P_2[y] = y(0) + y'(1) = 0$.

**2106.** $L[y] \equiv y'' - k^2 y$ ($k \neq 0$, adott valós szám); $P_1[y] = y(0) = 0$, $P_2[y] = y(1) = 0$.

**2107.** $L[y] \equiv x y'' + y'$; $P_1[y] = y'(0) = 0$; $P_2[y] = y(1) = 0$.

**2108.** $L[y] \equiv (4\,x\,y')' - \frac{n^2}{x}\,y$ ($n \neq 0$ egész); $P_1[y] \equiv y'(0) = 0$; $P_2[y] = y(1) = 0$.

**2109.** $L[y] = (1 - x^2)\,y'' - 2\,x\,y' - \frac{n^2}{1 - x^2}\,y$ ($n$ természetes egész szám); $P_1[y] = |y(-1)| < \infty$; $P_2[y] = |y(1)| < \infty$.

**2110.** $L[y] \equiv (1 - x^2)\,y'' - 2\,x\,y'$; $P_1[y] = |y(-1)| < \infty$; $P_2[y] = |y(1)| < \infty$. Fejtsük sorba sajátfüggvényei szerint a kapott GREEN-függvényt.

**2111.** $L[y] \equiv y''$; peremfeltételek: $y(0) = y(1)$ és $\int_0^1 y(x)\,dx = 0$.

**2112.** $L[y] \equiv y'' + \frac{\alpha}{x}\,y'$ ($\alpha > 1$). Peremfeltételek: $y(0)$ véges és $y'(1) + h\,y(1) = 0$. ($h \neq 0$.) Írjunk fel olyan homogén integrálegyenletet, melynek sajátfüggvényei az első fajú BESSEL-függvények!

**2113.** $L[y] \equiv y'' + \frac{1}{x}\,y'$. Peremfeltételek ugyanazok, mint a **2112.** alatt.

**2114.** Határozzuk meg integrálegyenlet segítségével az

$$y'' = \lambda\, A(x)\, y + f(x)$$

differenciálegyenlet $w$ szerint periodikus megoldásait, ahol $A(x)$ és $f(x)$ adott $w$ szerint periodikus függvények és $\int_a^{a+w} A(x)\,dx \neq 0$.

*Útmutatás:* Oldjuk meg először a feladatot a $\lambda = 0$ esetben, a kapott eredményt alkalmazzuk úgy az általános esetre, hogy feltesszük ideiglenesen, hogy a differenciálegyenlet jobb oldala adott.

**2115.** Írjuk le az ideálisan rugalmas, két végén rögzített húr rezgését. Számítsuk ki az alaprezgés frekvenciáját, feltéve, hogy a húr magjának sűrűsége a hosszúságtól lineáris módon függ!

*Útmutatás:* A rezgésegyenletet $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$ oldjuk meg a változók szétválasztásával. Ilyen módon parciális differenciálegyenletünk megoldását egy önadjungált homogén lineáris differenciálegyenlet peremérték-feladatára vezetjük vissza; ez utóbbi pedig a GREEN-függvény segítségével integrálegyenletre írható át.

**2116.** Határozzuk meg a csonka kúp alakú rúd két végpontjára ható erő hatására történő kihajlást és azt a legkisebb ún. kritikus erőt, melynél a rúd stabilitását elveszti.

*Útmutatás:* A kihajlott rúd tengelyének egyenlete a következő differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$\frac{d}{dx}\left(Ep\frac{dy}{dx}\right) + Py = 0.$$

($P$ a két végpontra ható erő, $p$ az $x$ keresztmetszetű helyen a tehetetlenségi nyomaték, $E$ a YOUNG-modulus). Ezt kell megoldani a GREEN-függvény segítségével $y(0) = y(l) = 0$ peremfeltétel mellett. Csonka kúp esetén

$$p = p(x) = \frac{\gamma r_0^4}{2}\left(1 + \frac{q}{l}x\right)^4$$

[$r_0$ a kisebbik, $r_0(1 + q)$ a nagyobb fedőkör sugara, $\gamma$ a rúd anyagának sűrűsége] A GREEN-mag legkisebb sajátértékét a nyomok módszerével számítsuk ki a második nyom segítségével.

**2117.** Vezessük vissza FREDHOLM-féle integrálegyenlet megoldására egyik végpontján mereven befogott $l$ hosszúságú rúd torziós rezgéseinek leírására vonatkozó problémát.

*Útmutatás:* a $\Theta$ elcsavarodás a következő differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right) - I_m \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0.$$

($I_m$ az egységnyi hosszúságú rúddarabnak a szilárdsági tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka, $K$ a rúd torziószilárdsága.)

**2118.** Homogén gömb lehűlését leíró differenciálegyenlet megoldása kapcsán fellép az alábbi önadjungált differenciálegyenlet:

$$\frac{d^2 v}{dr^2} = \lambda\, v(r)$$

a következő peremfeltételek mellett: $v(0) = 0$; $\frac{dv}{dr} + hv = 0$, ha $r = R$. Keressük meg e feladat GREEN-magját!

## 2.2. Integrálegyenletek alkalmazása kétváltozós, elliptikus differenciálegyenletek peremérték-feladatának megoldására. A kétváltozós Green-függvény. Kétdimenziós potenciálelméleti problémák

*a)* Legyen

$$L[u] \equiv \nabla^2 u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\,u, \tag{2.2.1}$$

ahol az $a, b, c$ együtthatók a korlátos $\Omega$ tartományban és annak peremén kétszer folytonosan differenciálható függvények, és a harmadik parciális deriváltak szakaszonként legyenek folytonosak. A perem legyen szakaszonként sima görbe. $L[u]$ adjungáltján a következőt értjük:

$$M[u] \equiv \nabla^2 u - \frac{\partial}{\partial x}(a\,u) - \frac{\partial}{\partial y}(b\,u) + c\,u.$$

(2.2.1)-en kívül legyen adva még valamely homogén határfeltétel:

$$H[u] = 0 \tag{2.2.2}$$

(2.2.1)-nek (2.2.2)-höz tartozó GREEN-függvényén a következő tulajdonságú $G(P, Q)$ függvényt értjük:

1°. $L_Q[G(P,Q)] = 0;\quad M_P[G(P,Q)] = 0,$

ahol $r_{PQ} = \overline{PQ} \neq 0$ és $P, Q \in \Omega$;

2°. $G(P,Q) = -\frac{1}{2\pi}\ln r_{PQ} + \gamma(P,Q),$

ahol $\gamma$ az $\Omega$-n és annak peremén folytonos.

3°. $H_P[G(P,Q)] = 0;\quad H_Q[G(P,Q)] = 0\quad$ ($Q$, illetve $P \in \Omega$).

(Az $L$ és $H$ betűkhöz írt index tünteti fel, hogy mit tekintünk független változónak.)

Ha a GREEN-függvény ismert, akkor az

$$L[u] + \lambda v = 0;\quad M[v] + \lambda u = 0 \tag{2.2.3}$$

parciális differenciálegyenlet-rendszer a (2.2.2) peremfeltételek mellett egyenértékű a következő integrálegyenlet-rendszerrel:

$$u(P) = \lambda \int_\Omega G(Q,P)\,v(Q)\,d\Omega_Q$$

$$v(P) = \lambda \int_\Omega G(P,Q)\,u(Q)\,d\Omega_Q.$$

Vagyis: (2.2.3) megoldásai a $G$ GREEN-függvény SCHMIDT-féle sajátfüggvényei és csak ezek, ha $\lambda$ a $G$ valamelyik SCHMIDT-féle sajátértékével azonos.

A mostani definíciónak megfelelő GREEN-függvény akkor és csak akkor létezik, ha $L[u] = 0$ differenciálegyenletnek egyetlen mindenütt korlátos, folytonos és kétszer folytonos differenciálhányadosokkal bíró megoldása, mely a $H[u] = 0$ feltételt is kielégíti, az $u \equiv 0$ függvény. Más szóval: GREEN-függvény akkor és csak akkor létezik, ha $\lambda = 0$ nem sajátértéke (2.2.3)-nak. Ha ellenben $\lambda = 0$ (2.2.3)-nak sajátértéke, akkor ún. általánosított GREEN-függvény létezik. Ezen olyan $\Gamma(P,Q)$ függvényt kell érteni, mely az előbbi 2° és 3° feltételeknek eleget tesz; 1° helyébe a következő lép:

**1*°.**

$$L_Q[\Gamma(P,Q)] = \sum_{(k)} u_k(P)\,u_k(Q)$$

$$L_P[\Gamma(P,Q)] = \sum_{(k)} v_k(P)\,v_k(Q),$$

ahol az $u_k$ és $v_k$ függvények a $\lambda = 0$-hoz tartozó normált sajátfüggvények (ilyen véges sok van).

Ha $L[u]$ önadjungált, akkor a következő alakú, [(2 2.1)-nél valamivel általánosabb — szokásos — formába felírva]:

$$L[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + q\,u,$$

ahol $p > 0$ kétszer folytonosan differenciálható, $q$ folytonos $\Omega$-n és peremén. Ez esetben 2° helyébe

$$2^{*\circ}. \qquad G(P, Q) = -\frac{A(P,Q)}{2\pi\,p(Q)}\ln r_{PQ} + \gamma(P, Q)$$

lép, ahol $A(P, P) \equiv 1$. Ekkor a $G$ GREEN-függvény szimmetrikus, azaz

$$G(P, Q) = G(Q, P).$$

Alapvető a következő tétel: ha $u(P)$ valamilyen, a $H[u] = 0$ feltételnek eleget tevő folytonos és folytonos első, valamint szakaszonként folytonos második parciális differenciálhányadosokkal rendelkező függvény, és

$$L[u] = -\varphi(P), \tag{2.2.4}$$

akkor

$$u(P) = \int_\Omega G(P, Q)\,\varphi(Q)\,d\Omega_Q. \tag{2.2.5}$$

És fordítva: ha $\varphi(P)$ folytonos és folytonos első parciális differenciálhányadosokkal bíró függvény, akkor (2.2.5) a (2.2.4) differenciálegyenlet azon integrálját szolgáltatja, mely a $H[u] = 0$ peremfeltételt kielégíti. Ebből persze következik, hogy az

$$L[u] + \lambda\,\varrho\,u = 0; \qquad H[u] = 0 \tag{2.2.6}$$

sajátérték-probléma megoldásai kielégítik az

$$u(P) = \lambda\int_\Omega G(P, Q)\,\varrho(Q)\,u(Q)\,d\Omega_Q \tag{2.2.7}$$

homogén integrálegyenletet. Ezen integrálegyenlet magja $G(P, Q)\,\varrho(Q)$ nem korlátos ugyan, de bebizonyítható, hogy másodiknál magasabb iteráltjai már korlátos és folytonos függvények így tehát a FREDHOLM-féle tételek erre is alkalmazhatók. Ha $\varrho \geqq 0$, akkor a (2.2.7) egyenletet $\sqrt{\varrho(P)}$-vel végigszorozva, és a $\sqrt{\varrho(P)}\,u(P) = z(P)$ jelölést bevezetve, a

$$z(P) = \lambda\int_\Omega G(P, Q)\,z(Q)\,d\Omega_Q$$

homogén integrálegyenletre jutunk. Mivel $G$ szimmetrikus, ez utóbbi egyenletnek vannak valós sajátfüggvényei és sajátértékei. Vagyis: a (2.2.6) feladatnak akkor és csak akkor van nem-triviális megoldása, ha $\lambda$ a $G(P, Q)$ GREEN-mag egyik sajátértéke. Ekkor a peremérték-feladatnak véges sok lineárisan független megoldása van.

Az

$$L[u] + \lambda\,\varrho\,u = f \quad H[u] = 0 \tag{2.2.8}$$

peremérték-feladat minden megoldása az

$$u(P) - \lambda\int_\Omega G(P, Q)\,\varrho(Q)\,u(Q)\,d\Omega_Q = -\int_\Omega G(P, Q)\,f(Q)\,d\Omega_Q = F(P) \tag{2.2.9}$$

integrálegyenletet kielégíti. Ki lehet mutatni, hogy ha (2.2.8) inhomogén, akkor (2.2.9) is az. Vagyis (2.2.8) egyértelműen akkor és csak akkor oldható meg, ha $\lambda$ a $G$-nek reguláris értéke. Ezek a tételek akkor is érvényesek, ha $G$ helyett $\Gamma$-t kell használni.

Ha a $G$ sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, sajátfüggvényei $u_1(P), u_2(P), \ldots$, akkor ellentétben az egydimenziós GREEN-függvénnyel a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(P)\, u_i(Q)}{\lambda_i}$$

sor általában nem konvergens. Ez a $G$ mag nem korlátos voltának következménye.

*b)* Integrálegyenletek a potenciálelmélet alapproblémái megoldásában is nagy szerepet játszanak.

Legyen ismét $\Omega$ korlátos tartomány, melynek pereme szakaszonként sima görbe. Ezen az $l$ görbén létesített $\mu(Q)$ sűrűségű kettős réteg potenciálja,

$$W(P) = \int_{(l)} \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r_{PQ}}\, \mu(Q)\, ds_Q$$

mint ismeretes a görbe belsejében és azon kívül harmonikus függvény. A síkbeli DIRICHLET probléma megoldásának gondolata abban áll, hogy a keresett harmonikus $W(P)$ függvényt mint egy kettős réteg potenciálját keressük, és így a probléma a $\mu$ sűrűségfüggvény meghatározására redukálódik. $n_Q$ jelenti a peremen levő $Q$ ponthoz tartozó belső normálist. Ismeretes az is, hogy $(WP)$ az $l$ görbén való áthaladáskor ugrást szenved. Pontosabban: legyen $W_b(Q)$ a $W(P)$ határértéke, ha a $P$ pont $\Omega$ belsejéből a kerületi $Q$ pont felé konvergál és $W_k(Q)$ pedig a megfelelő határérték, ha $P$ kívülről konvergál $Q$-hoz. Ekkor

$$W_b(Q) = W(Q) + \pi\, \mu(Q) \quad \text{és} \quad W_k(Q) = W(Q) - \pi\, \mu(Q). \qquad (2.2.10)$$

Vagyis maga az ugrás

$$W_k(Q) - W_b(Q) = 2\pi\, \mu(Q).$$

A belső DIRICHLET-feladat (2.2.10) első egyenlete miatt tehát a következő integrálegyenletre vezet:

$$\mu(P) + \frac{1}{\pi} \int_{(l)} \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r_{PQ}}\, \mu(Q)\, ds_Q = \frac{1}{\pi} f(P), \qquad (P \in l) \qquad (2.2.11),$$

ahol $f(P)$ az $l$ peremen adott függvény. A

$$K(P, Q) = \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r_{PQ}} \qquad (2.2.12)$$

mag minden kerületi pontban folytonos. $\lambda = -\frac{1}{\pi}$ ennek a magnak nem sajátértéke, így tehát a belső DIRICHLET-feladat bármely $f(P)$ függvény mellett egyértelműen megoldható. A külső DIRICHLET-feladat hasonló meggondolások alapján a (2.2.10) második egyenletének felhasználásával a

$$\mu(P) - \frac{1}{\pi} \int_{(l)} \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r_{PQ}}\, \mu(Q)\, ds_Q = \frac{1}{\pi} f(P) \qquad (2.2.13$$

integrálegyenletre vezet. $\lambda = \frac{1}{\pi}$ az egyenlet magjának sajátértéke. A (2.2.13) adjungált egyenletének egyetlen egy sajátfüggvénye van, jelöljük ezt $\mu_0$-lal. A FREDHOLM-féle alaptétel szerint (2.2.12) egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha $(f, \mu_0) = 0$. Határozzuk meg a $c$ számot úgy, hogy $\frac{1}{\pi} f - c$ legyen $\mu_0$-ra ortogonális. (2.2.13) jobb oldalába $\frac{1}{\pi} f - c$ függvényt behelyettesítve, kapunk valamilyen $\mu_1$ sűrűségfüggvényt. Ezzel a sűrűségfüggvénnyel létesített kettősréteg potenciálja legyen $W_1$. Akkor a DIRICHLET-feladat megoldása a $W = W_1 + c$ függvény. Tehát a külső DIRICHLET-feladatnak is bármely $f(P)$ mellett van megoldása.

Megjegyezzük még, hogy a kettősréteg potenciáljának normális menti deriváltja folytonos az $l$ görbén való áthaladáskor.

Síkgörbékre vonatkozó NEUMANN-feladat a következő módon vezethető vissza integrálegyenletre:

A problémát egyszerű réteg potenciáljaként keressük

$$V(P) = \int_{(l)} \ln \frac{1}{r_{PQ}} \varrho(Q)\, ds_Q. \tag{2.2.14}$$

Ismeretes, hogy a $V(P)$ függvény $\Omega$-ban és $\Omega$-n kívül harmonikus, mindenütt (tehát a $l$ görbén is) folytonos, normális menti deriváltjának viszont ugrása van, éspedig:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n_P}\right)_b + \pi \varrho(P) = \left(\frac{\partial v}{\partial u_P}\right)_k - \pi \varrho(P) = \int_{(l)} \frac{\partial}{\partial u_Q} \ln \frac{1}{r_{PQ}} \varrho(Q)\, ds_Q \quad (P \in l). \tag{2.2.15}$$

Ha $\left(\frac{\partial v}{\partial n_P}\right)_b = g(P)$, akkor (2.2.14) alapján

$$\varrho(P) - \frac{1}{\pi} \int_{(l)} \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PQ}} \varrho(Q)\, ds_Q = -\frac{1}{\pi} g(P). \tag{2.2.16}$$

Ennek az integrálegyenletnek a magja a (2.2.12) mag konjungáltja. Ha tehát, mint mondottuk, $\lambda = \frac{1}{\pi}$ a $K$ magnak sajátértéke, akkor sajátértéke a (2.2.16) egyenlet magjának is. Így tehát ez az integrálegyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha $g(P)$ a $K$ mag minden $\lambda = \frac{1}{\pi}$-hez tartozó sajátfüggvényére ortogonális. De ez a sajátfüggvény a $\varrho_0 = \text{const.}$ függvény, így a belső NEUMANN-feladat akkor és csak akkor oldható meg, ha

$$\int_{(l)} g(P)\, ds_P = 0.$$

A NEUMANN-feladat bármely két megoldásának különbsége állandó.

A külső NEUMANN-feladat (2.2.15) alapján a következő integrálegyenletre vezet:

$$\varrho(P) + \frac{1}{\pi} \int_{(l)} \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PQ}} \varrho(Q)\, ds_Q = -\frac{1}{\pi} g(P), \tag{2.2.17}$$

ahol most

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n_P}\right)_k = g(P).$$

Mivel a $K(P, Q)$ magnak $\lambda = -\frac{1}{\pi}$ nem sajátértéke, azért (2.2.17) magjának sem sajátértéke az $\frac{1}{\pi}$. Így tehát a külső NEUMANN-feladat bármilyen $g(P)$ mellett egyértelműen megoldható.

A DIRICHLET- és NEUMANN-feladatok általánosítása az ún. harmadik peremértékfeladat. Ez abban áll, hogy meghatározandó az $\Omega$-n (azon kívül) harmonikus függvény, melyre

$$a\, u(P) + b \left(\frac{\partial u}{\partial n_P}\right)_b = 0, \quad (P \in l)$$

ahol $a$ és $b$ adott függvények. Ha $a$ és $b$ állandók, akkor a megoldást egy egyszerű és egy kettős réteg potenciáljaként keressük, és az ismeretlen sűrűségfüggvény egy másodfajú FREDHOLM-típusú integrálegyenlet.

*c)* A komplex függvénytan néhány eredménye haszonnal alkalmazható kétdimenziós potenciálelméleti feladatoknak integrálegyenletekre való visszavezetésére. Különösen a következő tényeket kell megemlíteni mint a (2.2.10) tételek analogonjait.

Legyen $l$ valamely sima, zárt görbe, és $\varphi(\zeta)$ e görbe $\zeta$ pontjain értelmezett és $\alpha$ kitevőjű LIPSITZ-feltételt kielégítő függvény ($0 < \alpha \leqq 1$). Tekintsük a következő, ún. CAUCHY-típusú integrált:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(l)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Ha a $z$ komplex számnak megfelelő pont a tartomány belsejéből az $l$-en levő $t$ pont felé konvergál, akkor $F(z)$ határértéke $t$-ben:

$$F_b(t) = \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(l)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta. \qquad (2.2.18)$$

Ha pedig a tartományon kívüli $z$ ponttal közelítjük meg az $l$-en fekvő $t$ pontot, akkor $F(z)$ határértéke

$$F_k(t) = -\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(l)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta. \qquad (2.2.19)$$

(2.2.18) és (2.2.19) képletek jobb oldalán álló integrálok CAUCHY-főérték értelmében tekintendők.

## *Feladatok*

2201. Bizonyítsuk be (2.2.6) a (2.2.7) formulák egyenértékűségét!

2202. Miért egyenértékű (2.2.8) a (2.2.9) képlettel?

2203. Legyen $L[u] \equiv \nabla^2 u \left(= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ és $\Omega \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0$ kör. Peremfeltétel: $u$ legyen zérus az $\Omega$ pontjaiban. Határozzuk meg e probléma GREEN-függvényét, ennek sajátértékeit és sajátfüggvényeit.

*Útmutatás:* Képezzük az $\Omega$ körlap egy belső pontjának a körre vonatkozó konjugáltját, és használjuk ki azt, hogy $\ln r$ és $\ln r^*$ függvények harmonikusak. $r = \overline{PQ}$ és $r^* = \overline{PQ^*}$ rögzített $Q$ mellett, $Q^*$ a $Q$ konjugáltja, vagyis az a pont, melyre $\frac{r}{r^*} = c$, bármely kerületen levő $P$ pontra.

2204. $L[u] \equiv \nabla^2 u$, az $\Omega$ tartomány egy körgyűrű. A peremfeltétel: az $u$ függvény a körgyűrű peremén eltűnik. Állapítsuk meg a GREEN-magot.

*Útmutatás:* Állapítsuk meg azt az $f(z)$ analitikus, a körgyűrűben reguláris függvényt, mely a $Q$ belső pontban első rendben eltűnik, a peremen $\equiv 1$. Ennek logaritmusának negatív valós része a keresett mag.

2205. Bizonyítsuk be, hogy valamely szakaszonként sima görbével határolt egyszeresen összefüggő síktartományra vonatkozó DIRICHLET-feladat megoldása [$\nabla^2 u = 0$ differenciálegyenlet azon megoldásának meghatározása, mely az $\Omega$ tartomány $l$ peremén előírt $u_l = f(s)$ értékeket vesz fel] explicit módon így nyerhető:

$$u(P) = -\int_{(l)} \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} f(Q)\, ds_Q,$$

ahol az integrál az $l$ peremre vonatkozó vonalintegrál, $G$ az $L \equiv \nabla^2$ kifejezésnek $\Omega$-ra vonatkozó GREEN-függvénye, $\frac{\partial G}{\partial n_Q}$ jelenti $G$-nek az $l$ pontjaiban vett külső normális menti differenciálhányadosát.

*Útmutatás:* Rekesszük ki a belső $P$ pontot egy kis körrel, a megmaradt tartományra alkalmazzuk az ismert GREEN-képletet a szóban forgó $u$ harmonikus és $v = G(P, Q)$ függvényre, majd a kirekesztő kör sugarát konvergáltassuk a zérushoz.

**2206.** Oldjuk meg az egységkörre vonatkozó DIRICHLET-feladatot! (Vagyis határozzuk meg azt az egységkörben harmonikus függvényt, mely az egységkörön előírt peremértékeket vesz fel.)

**2207.** Igazoljuk, hogy az egységsugarú gömbön értelmezett

$$L[u] = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

kifejezés GREEN-függvénye

$$\Gamma(P, Q) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\varrho}{2} \right|.$$

$\varrho$ jelenti a $P$ és $Q$ pontok legkisebb szferikus távolságát. A peremfeltétel itt az, hogy $u$ legyen az egész gömbön korlátos. Számítsuk ki $\Gamma$ sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

**2208.** A $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ differenciálegyenletre vonatkozó DIRICHLET-feladat megoldását vezessük vissza FREDHOLM-típusú integrálegyenletre! A tartomány legyen korlátos, egyszeresen összefüggő, és kontúrja álljon véges sok szakaszonként sima görbéből.

*Útmutatás:* Ismételjük meg a **2206.** sz. feladat megoldásánál követett gondolatmenetet.

**2209.** Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\partial}{\partial u_Q} \ln \frac{1}{r_{PQ}} = \frac{\cos(r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}}, \qquad (P \in l)$$

ahol $l$ valamely $\Omega$ korlátos tartomány kontúrja.

**2210.** Bizonyítsuk be, hogy a

$$K(P, Q) = \frac{\cos(r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}}$$

mag az $l$ peremgörbén folytonos ($P$ és $Q$ az $l$ görbén fekszik), ha $l$ folytonos görbületű.

**2211.** Igazoljuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r_{PQ}} = \frac{dw}{ds_Q},$$

ahol $w$ a $\overrightarrow{PQ}$ vektornak az $X$ tengely pozitív irányával bezárt szöge. ($Q$ az $l$ görbén van.)

**2212.** Számítsuk ki a

$$\oint_{(l)} \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r_{PQ}} \, ds_Q$$

vonalintegrál értékét, ha *a)* $P$ a tartomány belsejében, *b)* $P$ a tartomány kontúrján, *c)* $P$ a tartományon kívül van.

*Útmutatás:* Használjuk fel a 2212. feladat eredményét!

**2213.** Az $l$ kontúr paraméteres egyenletrendszere legyen $x = x(s)$, $y = y(s)$. Bizonyítsuk be, hogy ha $P$ és $Q$ pontok az $l$ görbén vannak, akkor

$$K(P, Q) = \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r_{PQ}} = \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)} = K(s, t).$$

**2214.** Oldjuk meg integrálegyenletek segítségével a körre vonatkozó DIRICHLET-feladatot!

**2215.** Oldjuk meg az ellipszisre vonatkozó belső DIRICHLET-feladatot!

**2216.** Bizonyítsuk be azt, hogy ha az $l$ szakaszonként sima, zárt görbe által határolt tartományra vonatkozó (külső vagy belső) DIRICHLET-feladatot az

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(l)} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

CAUCHY-típusú integrál reális részével akarjuk megoldani valós $\mu(\zeta)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor a 2209. alatti maggal bíró integrálegyenletre jutunk.

**2217.** Számítsuk ki egy négyzetes keresztmetszetű rúd torziójánál fellépő feszültségek $\tau_{xz}$ és $\tau_{yz}$ komponenseit.

*Megoldás.* Vegyük fel a derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy a $Z$ tengely essék egybe a rúd tengelyével, az $X$ és $Y$ tengelyek pedig a négyzet oldalaival legyenek párhuzamosak. Tegyük fel — mint ahogyan az általában szokásos —, hogy a feszültségek összes komponensei a $\tau_{xz}$ és $\tau_{yz}$ komponenseitől eltekintve, mind zérusak. E feszültségkomponenseket

$$\tau_{xz} = -\lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \Theta y\right); \quad \tau_{yz} = \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Theta y\right)$$

alakban keressük, ahol $\Theta$ állandó, a rúd torziójával arányos mennyiség. $\varphi$-ről ismert, hogy a rúd keresztmetszete által definiált tartományban, jelen esetben a négyzetben harmonikus, és a peremen a $-\frac{1}{2}\Theta(x^2 + y^2)$ értékeket veszi fel. A számítás elvégzése érdekében célszerűbb az $u(\alpha, y) = -\frac{2}{\Theta}\varphi(x, y)$ függvényt meghatározni, mely szintén harmonikus, és a peremen az $x^2 + y^2$ értékeket veszi fel. Ezt, mint eddig mindig, egy kettős réteg potenciálja gyanánt keressük, melynek vonal menti $\mu$ sűrűségére fennáll a következő integrálegyenlet

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \int_{(l)} \frac{\cos(n, r)}{r} \mu(\zeta)\, ds = 2(x^2 + y^2).$$

Itt $t = x + iy$ a négyzet oldalainak pontja.

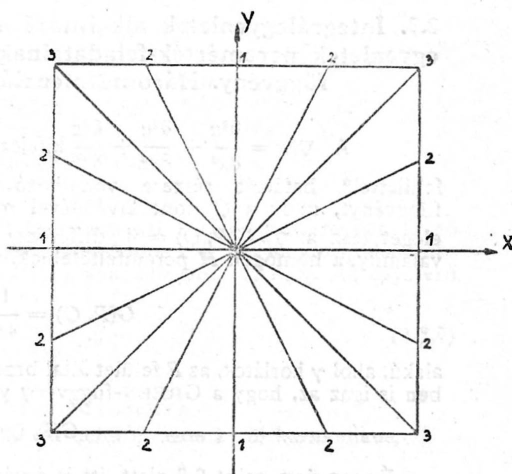
Ezen integrálegyenlet numerikus megoldása érdekében vegyük figyelembe, hogy

$$-\frac{\cos(u, r)}{r} ds = d\vartheta,$$

és így megoldandó egyenletünk

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \oint_{[]} \mu(\zeta)\, d\vartheta = 2(x^2 + y^2)$$

alakú lesz.



1. ábra

A négyzet oldalhosszúsága legyen 2, mindegyik oldalt osszuk fel négy egyenlő részre. Az osztópontokat a középtől számítva 1, 2, 3 számmal jelöljük. Az integrálegyenlet megoldása a peremfeltétel szimmetriája miatt olyan $\mu$ függvény, mely az $y = 0$, $x = 0$, $y = x$, $y = -x$ egyenesekre szimmetrikus, tehát az ábrán egyenlő számmal jelölt pontokban $\mu$ értékei is egyenlőek egymással. Legyen

$$t_1 = 1, \qquad t_2 = 1 + \frac{i}{2}, \qquad t_3 = 1 + i$$

és

$$\mu(1) = \mu_1; \qquad \mu\left(1 + \frac{i}{2}\right) = \mu_2; \qquad \mu(1 + i) = \mu_3.$$

Az integrálegyenletben szereplő integrált pótoljuk azzal a téglalap-összeggel, mely a négyzet most mondott felosztásához tartozik:

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{16} \mu(t_k)\, \Delta\vartheta_k(t) = 2\,|\,t\,|^2.$$

$\Delta\vartheta_k(t)$ szögön értjük a $t_k$ és $t_{k+1}$ pontokat a $t$ ponttal összekötő egyenesszakaszoknak egymással bezárt szögét. Ha most $t$ rendre az előbbi $t_1$, $t_2$, $t_3$ értékeket veszi fel, kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$1{,}2432\,\mu_1 + 0{,}5000\,\mu_2 + 0{,}2658\,\mu_3 = 2{,}000$$
$$0{,}1992\,\mu_1 + 1{,}4273\,\mu_2 + 0{,}3734\,\mu_3 = 2{,}500$$
$$0{,}1269\,\mu_1 + 0{,}2508\,\mu_2 + 1{,}1239\,\mu_3 = 4{,}000.$$

Ebből

$$\mu_1 = 0{,}60; \qquad \mu_2 = 0{,}80; \qquad \mu_3 = 3{,}32.$$

Interpoláljuk a $\mu$ függvényt a négyzetnek az $X$ tengellyel párhuzamos oldalain az $a\,x^4 + b\,x^2 + c$ alakú polinommal, akkor a szimmetriaviszonyok miatt az $Y$ tengellyel paralel oldalakon az interpolálás az $a\,y^4 + b\,y^2 + c$ polinommal történik. Az együtthatók: $a = 2{,}56$; $b = 0{,}16$; $c = 0{,}60$; vagyis

$$\mu(x \pm i) = 2{,}56\,x^4 + 0{,}16\,x^2 + 0{,}60$$
$$\mu(\pm 1 + i\,y) = 2{,}56\,y^4 + 0{,}16\,y^2 + 0{,}60.$$

Ha $\mu$ ismert, akkor megvan a $\varphi$, ennek segítségével $\tau_{xz}$ és $\tau_{yz}$ már könnyen kiszámítható.

## 2.3. Integrálegyenletek alkalmazása háromváltozós elliptikus differenciálegyenletek peremérték-feladatainak megoldására. A háromváltozós GREEN-függvény. Háromdimenziós potenciálelméleti problémák

*a)* A $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ kifejezésnek a tér valamely korlátos zárt $F$ LJAPUNOV-felülettel* határolt részére vonatkozó GREEN-függvényén értjük azt a $G(P, Q)$ függvényt, mely a $Q$ pont kivételével mindenütt kétszer folytonosan differenciálható, eleget tesz a $\nabla_P^2 G(P, Q) = 0$ differenciálegyenletnek, a felület pontjaiban eleget tesz valamilyen homogén $H$ peremfeltételnek, és végül a $Q$ pont közelében

$$G(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{PQ}} + \gamma(P, Q) \tag{2.3.1}$$

alakú, ahol $\gamma$ korlátos, az $F$ felület által bezárt $\Omega$ térrészben harmonikus függvény. Ez esetben is igaz az, hogy a GREEN-függvény változóinak szimmetrikus függvénye:

$$G(P, Q) = G(Q, P).$$

Éppen úgy, mint 2.2 alatt, itt is érvényes az az alapvető tétel, melynek értelmében, ha $u$ valamely, az $F$ felületen érvényes homogén peremfeltételnek eleget tevő függvény, mely folytonos első és szakaszonként folytonos második parciális differenciálhányadosokkal bír, akkor

$$u(P) = -\int_{\Omega} G(P, Q)\, \nabla^2 u(Q)\, d\Omega_Q. \tag{2.3.2}$$

Ez az állítás meg is fordítható: ha $\varphi(P)$ $\Omega$-ban folytonos, és folytonos első parciális deriváltakkal bíró függvény, akkor az

$$u(P) = \int_{\Omega} G(P, Q)\, \varphi(Q)\, d\Omega_Q \tag{2.3.3}$$

függvény a

$$\nabla^2 u = -\varphi(P) \tag{2.3.4}$$

parciális differenciálegyenletnek azt a partikuláris megoldását adja, mely a szóban forgó homogén peremfeltételnek tesz eleget. Ebből persze következik, hogy a

$$\nabla^2 [u] + \lambda\, \varrho(P)\, u(P) = 0 \qquad H[u] \equiv 0 \qquad [\varrho(P) \geqq 0] \tag{2.3.5}$$

sajátérték-probléma egyenértékű az

$$u(P) = \lambda \int_{\Omega} G(P, Q)\, \varrho(Q)\, u(Q)\, d\Omega_Q \tag{2.3.6}$$

homogén integrálegyenlet sajátérték-problémájával. $\sqrt{\varrho(P)}$-vel való végigszorzással ez visszavezethető szimmetrikus magú integrálegyenletre.

Ha a megfelelő inhomogén problémát tekintjük:

$$\nabla^2 u + \lambda\, \varrho(P)\, u(P) = f(P) \qquad H[u] \equiv 0,$$

* A sima $F$ felület LJAPUNOV típusú, ha a következő feltételek teljesülnek:

*a)* Az $F$ két $A$ és $B$ pontjában húzott normális közti $\delta$ szög kielégíti a

$$\delta < c\, r_{AB}^{\alpha}$$

egyenlőtlenséget, ahol $r_{AB}$ az $A$ és $B$ pontok távolsága, $c$ és $\alpha$ az $A$ és $B$ helyzetétől nem függő állandók.

*b)* Létezik olyan $\varepsilon > 0$, az $A$ felületi pont helyzetétől nem függő szám, mely azzal a tulajdonsággal bír, hogy minden az $A$ pontban húzott és $F$ normálisával párhuzamos egyenes legfeljebb egyszer metszi az $F$ felületnek az $\varepsilon$ sugarú $A$ középpontú gömb belsejében fekvő részét.

akkor ez ismét egyenértékű a következő inhomogén integrálegyenlettel:

$$u(P) - \lambda \int_{\Omega} G(P, Q)\, \varrho(Q)\, u(Q)\, d\Omega_Q = \Phi(P),$$

ahol

$$\Phi(P) = -\int_{\Omega} G(P, Q) f(Q)\, d\Omega_Q.$$

A tér valamely korlátos, LJAPUNOV-felületdarabokkal határolt részére vonatkozó DIRICHLET- és NEUMANN-feladat – hasonlóan a síktartományokra vonatkozó feladatokhoz – szintén mint kettős, illetve egyszerű réteg potenciálja oldható meg. Az egyszerű réteg potenciálján a

$$V(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{(F)} \frac{\varrho(Q)}{r_{PQ}}\, df_Q \qquad (2.3.7)$$

integrált értjük. Ez a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

*a)* az $F$ zárt felület által definiált tartományon belül és azon kívül harmonikus,

*b)* az egész térben folytonos,

*c)*
$$\frac{\partial V}{\partial n_b} = -\frac{1}{2}\varrho(P) + \frac{1}{4\pi}\int_F \varrho(Q)\, \frac{\cos(r_{PQ}, n_P)}{r_{PQ}^2}\, df_Q \quad (P \in F) \qquad (2.3.8)$$

$$\frac{\partial V}{\partial n_k} = \frac{1}{2}\varrho(P) + \frac{1}{4\pi}\int_F \varrho(Q)\, \frac{\cos(r_{PQ}, n_P)}{r_{PQ}^2}\, df_Q. \quad (P \in F) \qquad (2.3.9)$$

$n_P$ jelenti $F$-nek a $P$ ponthoz tartozó külső normálisát, $\frac{\partial V}{\partial n_b}$, illetve $\frac{\partial V}{\partial n_k}$ jelenti $\frac{\partial V}{\partial n}$ határértékét az $F$ felület $P$ pontjában, ha $P$ felé a tartomány belsejéből, illetve kívülről közeledünk.

A kettős réteg potenciálján a következőt értjük:

$$W(P) = \frac{1}{4\pi}\int_F \frac{\partial \frac{1}{r_{PQ}}}{\partial n_Q}\, \sigma(Q)\, df_Q \qquad (2.3.10)$$

Ezeknek alapvető tulajdonságai:

*a)* a felület által meghatározott tartományon belül és kívül harmonikus,

*b)* határértéke az $F$ felület $P$ pontjában, ha a $P$ pontot belülről, illetve kívülről megközelítjük:

$$W_b(P) = \frac{1}{2}\sigma(P) + \frac{1}{4\pi}\int_F \frac{\cos(r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}^2}\, \sigma(Q)\, df_Q \quad (P \in F) \qquad (2.3.11)$$

$$W_k(P) = -\frac{1}{2}\sigma(P) + \frac{1}{4\pi}\int_F \frac{\cos(r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}^2}\, \sigma(Q)\, df_Q. \quad (P \in F) \qquad (2.3.12)$$

*c)* $W(P)$ normális menti deriváltja $F$ belső és külső oldalán azonos értéket vesz fel.

Ha $P$ és $Q \in F$, akkor

$$\left| \frac{\cos(r_{PQ}, n_P)}{r_{PQ}^2} \right| < \frac{c}{r_{PQ}^{2-\alpha}},$$

ahol $c$ állandó $\alpha$ pedig a LJAPUNOV-felület exponense.

*Feladatok*

2301. Legyen $F$ egy $R$ sugarú gömb, és tekintsük mindazokat az $u$ függvényeket, melyek a gömb felületen eltűnnek. Határozzuk meg az $\nabla^2 u$ kifejezésnek a gömbre és a szóban forgó peremfeltételre vonatkozó GREEN-magját!

2302. Bizonyítsuk be, hogy valamely véges $\Omega$ tartományra vonatkozó DIRICHLET-feladat megoldását a következő módon lehet explicit módon megadni:

$$U(P) = -\iint_{\Sigma} \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} f(Q)\, df_Q,$$

ahol $G$ jelenti az $\Omega$ tartományra vonatkozó GREEN-függvényt; $n_0$ az $\Omega$ tartományt határoló $\Sigma$ felület külső normálisa a $Q$ pontban.

*Útmutatás:* Zárjuk ki a $P$ pontot egy kis gömbbel az $\Omega$ tartományból, és a megmaradt tartományra alkalmazzuk a közismert

$$\iiint (u\, \nabla^2 G - G\, \nabla^2 u)\, dv = \int \left( u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) df$$

GREEN-formulát ($G$-t rögzített $P$ mellett mint $Q$ függvényét vesszük), azután $P$-t kizáró gömb sugarát a 0-hoz konvergáltatjuk.

2303. Integrálegyenlet segítségével oldjuk meg a gömbre vonatkozó DIRICHLET-feladatot.

2304. Bizonyítsuk be, hogy zárt felületre vonatkozó külső DIRICHLET-feladat mindig megoldható mint kettős réteg potenciálja.

2305. Mutassuk meg, hogy a

$$K(P, Q) = \frac{\cos (r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}^2}$$

magnak $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ sajátértéke ($P$ és $Q$ rajta fekszenek a zárt $F$ LJAPUNOV-típusú felületen). Ehhez tartozó sajátfüggvény $\varphi \equiv$ constans.

2306. Igazoljuk, hogy a külső DIRICHLET-feladat

$$Z(P) = \frac{1}{4\pi} \int_F \frac{\partial \frac{1}{r_{PQ}}}{\partial n_Q} \sigma(Q)\, df_Q - \frac{1}{2R} \int_F \sigma(Q)\, df_Q$$

alakban megoldható, ahol $R = OP$.

2307. Miért nem oldható meg általában a külső DIRICHLET-feladat úgy, hogy a harmonikus függvényt kettős réteg potenciáljaként keressük?

2308. Bizonyítsuk be, hogy a külső NEUMANN-feladat mindig megoldható úgy, hogy a harmonikus függvényt egyszerű réteg potenciáljaként keressük!

2309. Állapítsuk meg annak a szükséges és elégséges feltételét, hogy a belső NEUMANN-feladat mint egyszerű réteg potenciálja megoldható legyen.

## 2.4. Abel-típusú integrálegyenletre vezető feladatok

A következő első fajú, VOLTERRA-féle integrálegyenletet

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha}\,dy = f(x) \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{2.4.1}$$

Abel típusúaknak nevezzük. Megoldása a következő módon történik: szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $(z-x)^{\alpha-1}$-gyel, és integráljunk 0-tól $z$-ig $x$ szerint:

$$\int_0^z (z-x)^{\alpha-1} f(x)\,dx = \int_0^z (z-x)^{\alpha-1}\left(\int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha}\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^z\left(\int_y^z (z-x)^{\alpha-1}(x-y)^{-\alpha}\,dx\right)\varphi(y)\,dy.$$

Ebből

$$\varphi(z) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\,\frac{d}{dz}\int_0^z f(x)\,(z-x)^{\alpha-1}\,dx, \tag{2.4.2}$$

mert

$$\int_y^x (z-x)^{\alpha-1}(x-y)^{-\alpha}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

*Feladatok*

**2401.** TAUTOCHRON-probléma. Egy tömegpont a földi nehézségi erőtér hatása alatt végigfut egy függőleges síkban fekvő görbe íven; zérus kezdősebességgel indul. A mozgó pont a pálya legmélyebb helyére $t$ idő alatt ér, mely a kezdőponttól való $z$ magasság valamilyen $f(z)$ függvénye. Kérdés: adott $f(z)$ mellett mi a pálya egyenlete?

*Útmutatás:* Induljunk ki az energiatörvényből!

**2402.** Bizonyítsuk be, hogy az

$$\int_0^x \frac{1+K(x,y)}{\sqrt{x-y}}\,\varphi(y)\,dy = f(x) \tag{*}$$

integrálegyenlet megoldása a

$$\pi V(z) = \int_0^z \frac{f(x)}{\sqrt{z-x}}\,dx + \int_0^z V(y)\left(\frac{\partial}{\partial y}\int_y^z \frac{K(x,y)\,dx}{\sqrt{(z-x)(x-y)}}\right)dy$$

VOLTERRA-típusú másodfajú egyenlet megoldásának a differenciálhányadosa. A $K(x,y)$ függvényről feltesszük, hogy korlátos, $\frac{\partial K}{\partial y}$ létezik, és szintén korlátos, és ezek az $y \leqq x$ tartományban abszolút folytonosak, és integrálhatók $x$ és $y$ szerint. $f(x)$ legyen korlátos és abszolút folytonos.

**2403.** Oldjuk meg a

$$\int_0^x (x-y)^\beta \varphi(y)\,dy = x^\lambda \qquad (\lambda \geqq 0;\ \beta > -1)$$

integrálegyenletet.

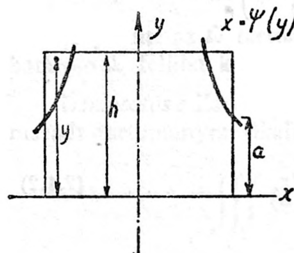
**2404.** Keressük meg az

$$\int_0^x (x-y)^\beta \varphi(y)\,dy = F(x) \qquad (\beta > -1)$$

integrálegyenlet megoldását, ahol

$$F(x) = a_1 x^{\lambda_1} + a_2 x^{\lambda_2} + \ldots + a_n x^{\lambda_n}.$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geqq 0)$$



2. ábra

**2405.** Egy függőleges völgyzáró fal két oldalán vízáteresztő nyílás van (l. az ábrát!). Ezeken az időegység alatt átfolyó vízmennyiség a vízszint függvénye. Kérdés, milyennek kell a mellékelt ábra szerinti falak mellett az $x = \psi(y)$ kontúrnak lennie ahhoz, hogy az időegység alatt kifolyt vízmennyiség a vízmagasság lineáris függvénye legyen?

*Megoldás:* Ha a vízmagasság $h$, akkor valamely $y$ magasságban levő rétegben a víz áramlási sebessége $\sqrt{2g(h-y)}$, tehát a teljes nyíláson az időegység alatt átfolyt folyadékmennyiség

$$\sqrt{2g}\int_a^b \sqrt{h-y}\,\psi(y)\,dy + \frac{2}{3} b\,[h^{3/2} - (h-a)^{3/2}] = F(h).$$

Legyen $y = a + t$, $h = a + s$, $\psi(a+t) = \varphi(t)$, $F(h) = F(a+s) = A + B\,s$,

$$-\frac{2}{3} b\,[(a+s)^{3/2} - s^{3/2}] = f(s).$$

E helyettesítések révén a

$$\sqrt{2g}\int_0^s \sqrt{s-t}\,\varphi(t)\,dt = A + B\,s - \frac{2}{3} b\,[(a+s)^{3/2} - s^{3/2}]$$

integrálegyenletre jutunk. Feltéve, hogy $s$ elegendő kicsiny, a jobb oldal a következő alakú sorba fejthető:

$$A - \frac{2}{3} b\,a^{3/2} + (B - b\,a^{1/2})\,s - \frac{1}{4} b\,a^{-1/2} s^2 + \frac{2}{3} b\,s^{3/2} -$$

$$-\,2\sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k b\,a^{3/2} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-5)}{2^k\,k!\,a^k} s^k.$$

Alkalmazzuk a 2404. feladat megoldásánál követett elvet, annak alapján

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi\sqrt{2g}}\left[\left(\frac{2}{3}\, b\, a^{3/2} - A\right) s^{-3/2} + 2\,(B - b\, a^{1/2})\, s^{-1/2} - 2b \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-3}\left(\frac{s}{a}\right)^{k-\frac{3}{2}}\right].$$

Ha $s$ elég kicsiny, akkor a jobb oldalon álló végtelen sor egyenletesen konvergens. Összege zárt alakban is felírható:

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi\sqrt{2g}}\left[\left(\frac{2}{3}\, b\, a^{3/2} - A\right) s^{-3/2} + 2(B - b\, a^{1/2})\, s^{-1/2} + 2b \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{s}{a}}\right]$$

2406. Megoldandó az

$$\int_0^x K(x-y)\, \varphi(y)\, dy = f(x)$$

integrálegyenlet, ahol

$$K(t) = \frac{A_0}{\pi(\alpha-1)}\, t^{\alpha-1} + \frac{A_1}{\pi(\alpha)}\, t^{\alpha} + \frac{A_2}{\pi(\alpha+1)}\, t^{\alpha+1} + \ldots$$

alakú függvény. $A_0 \neq 0$, $0 < \alpha < 1$. $\pi(\lambda) = \Gamma(\lambda+1)$ (Sonin-féle integrálegyenlet).

*Útmutatás:* Egy

$$L(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{\pi(k-\alpha)}\, t^{k-\alpha}$$

alakú függvény segítségével képezett $L(z-x)$ maggal szorozzuk végig integrálegyenletünket, és integrálás után határozzuk meg a $B_k$ együtthatókat úgy, hogy a kiszámítandó $\varphi$ függvény együtthatója 1 legyen.

2407. Oldjuk meg a

$$\int_y^x [\ln(t-y) - c]\, \mu(t)\, dt = y - x$$

integrálegyenletet, ahol $c = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = 0{,}577\ldots$ (Euler-féle állandó).

*Megoldás.* Tudjuk, hogy

$$\int_y^x (x-t)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-y)^{\alpha+\beta-1}. \qquad (y \leqq x)$$

Osszuk végig az egyenletet $\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)$-val, utána differenciáljuk $\beta$ szerint, és integráljunk az $\alpha$ szerint:

$$\int_y^x \frac{\partial}{\partial\beta}\, \frac{(t-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_\alpha^\infty \frac{(x-t)^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)}\, d\tau\, dt = -\frac{(x-y)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Mivel

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{(t-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \frac{(t-y)^{\beta-1}\ln(t-y)}{\Gamma(\beta)} - \frac{(t-y)^{\beta-1}(\beta)}{\Gamma(\beta)^2},$$

azért $\beta = 1$ és $\alpha = 1$ értékek mellett

$$\int_y^x [\ln(t-y) - c] \int_0^\infty \frac{(x-t)^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} d\gamma\, dt = y - x.$$

Vagyis egyenletünk megoldása:

$$\mu(t) = \int_0^\infty \frac{(x-t)^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} d\gamma.$$

**2408.** Megoldandó az alkalmazásokban nagy szerepet játszó

$$\int_0^x [\ln(x-y) - c]\,\varphi(y)\,dy = f(x) \qquad \left(c = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}\right)$$

VOLTERRA—PÉRES-féle integrálegyenlet.

*Útmutatás:* A megoldás módszere ugyanaz mint az ABEL-féle integrálegyenleté, csakhogy $(z-x)^{\alpha-1}$ szerepét a $\mu(z-x)$ függvény veszi át, ahol $\mu$ a **2407.** feladatban szereplő integrálegyenlet megoldása.

## 2.5. CAUCHY- és HILBERT-típusú szinguláris integrálegyenletek

*a)* CAUCHY-*típusú integrálegyenleten* olyan egyenletet értünk, melynek magja $\frac{1}{\zeta - z}$ alakú, az integrációs út a komplex számsík valamely (nyílt v. zárt) $l$ görbéje ($\zeta$ és $z \in l$). Az itt fellépő integrálokon a CAUCHY-féle főértéket kell érteni. A továbbiak megértése érdekében előrebocsátjuk a következő tételeket:

*α)* PRIVALOV *tétele.* Ha $f(z) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha \leqq 1,\ z \in l)$, akkor az

$$f_1(z) = \int_{(l)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

integrál az $l$ görbe valamennyi pontjában létezik, kivéve esetleg a görbe végpontjait, továbbá minden belső részívdarabon $f_1(z) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, ha $\alpha < 1$; ha pedig $\alpha = 1$, akkor $f_1(z) \in \mathrm{Lip}\,\beta$, ahol $0 < \beta < 1$ bármilyen szám.

*β)* Legyen $f(\zeta) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ az $l$ zárt görbén, a görbe által határolt véges síktartomány legyen $\Omega$. Ha a $z$ pont $\Omega$-ból az $l$-en levő $t$ ponthoz konvergál, akkor az

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(l)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \mathcal{C}f \tag{2.5.1}$$

függvény határértéke

$$F_b(t) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{(l)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta. \quad (t \in l) \tag{2.5.2}$$

Ha pedig $z$ a $\bar{\Omega}$ tartomány felől közeledik a perem $t$ pontjához, akkor (2.5.1) függvény határértéke:

$$F_k(t) = -\frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{(l)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta. \quad (t \in l) \tag{2.5.3}$$

*γ) A* POINCARÉ—BERTRAND-*formula.* A (2.5.1) alatt bevezetett operátorjelet használva, érvényes a következő reláció:

$$\mathcal{C}(\mathcal{C}f) = \frac{1}{4}f \tag{2.5.4}$$

*b)* HILBERT-*típusúnak* nevezzük azt az integrálegyenletet, melynek magja $\frac{1}{2\pi}\operatorname{cotg}\frac{x-y}{2}$, az integrációs tartomány a $(0, 2\pi)$ intervallum.

Ha bevezetjük a

$$\mathcal{H}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}\frac{x-y}{2}\,\varphi(y)\,dy$$

jelölést, akkor érvényes az, hogy

$$\mathcal{H}(\mathcal{H}\varphi) = -\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt.$$

## *Feladatok*

2501. Bizonyítsuk be, hogy a POINCARÉ—BERTRAND-formulában (2.5.4)-ben az integrálok sorrendje nem cserélhető fel (vagyis bármely $f$-re általában $\mathcal{C}(\mathcal{C}f) \not\equiv \mathcal{C}^2 f$).

Oldjuk meg az alábbi integrálegyenleteket:

2502.

$$a\,\varphi(x) + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{cotg}\frac{y-x}{2}\,\varphi(y)\,dy = f(x).$$

$a$ és $b$ állandók, $a^2 + b^2 \neq 0$.

*Útmutatás:* Az egyenlet mindkét oldalára alkalmazzuk az $a\,\mathcal{E} - b\,\mathcal{H}$ operátort.

2503.

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{cotg}\frac{y-x}{2}\,\varphi(y)\,dy.$$

2504.

$$\varphi(x) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{cotg}\frac{y-x}{2}\,\varphi(y)\,dy = 1.$$

2505. Adjuk meg az

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{cotg}\frac{y-x}{2}\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

első fajú integrálegyenlet megoldhatóságának feltételét!

*Oldjuk meg a következő integrálegyenleteket:*

2506.

$$a\varphi + b\,\mathcal{H}\varphi + \int_0^{2\pi} K(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x).$$

$K(x, y)$ korlátos és folytonos mag, $a^2 + b^2 \neq 0$.

2507.

$$3\varphi + \mathcal{H}\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(x)\,\varphi(x)\,dx = 1.$$

2508.

$$(a\mathcal{E} + b\,\mathcal{C})\,\varphi \equiv a\varphi + \frac{b}{\pi i}\oint_{(l)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = f(z),$$

ahol $l$ szakaszonként sima, zárt görbe, $f(z)$ adott $\alpha$ kitevőjű LIPSITZ-feltételnek eleget tevő függvény, $a$ és $b$ adott állandók, $a^2 - b^2 \neq 0$. A $z$ pont az $l$ görbén fekszik.

*Útmutatás:* Az egyenlet mindkét oldalára alkalmazzuk az $a\,\mathcal{E} - b\,\mathcal{C}$ operátort, és vegyük tekintetbe (2.5.4) formulát.

2509. Határozzuk meg azokat a $\lambda$ számokat, melyek mellett a

$$\varphi(z) = \lambda\,\mathcal{C}\varphi$$

egyenletnek van nem-triviális megoldása.

2510. Adjuk meg a

$$\oint_{(l)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = f(z)$$

első fajú integrálegyenlet megoldását!

2511. Megoldandó az

$$a\,\varphi(z) + \frac{b}{\pi i}\oint_{(l)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \int_{(l)} K(z, \zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta = f(z)$$

integrálegyenlet, ahol $a$ és $b$ az $a^2 - b^2 \neq 0$ feltételnek eleget tevő állandók, $K(z, \zeta)$ mag az $l$ görbén $z$-ben egyenletesen tesz eleget egy $\alpha$ típusú LIPSITZ-feltételnek.

## 2.6. $K(x - y)$ alakú magokkal bíró integrálegyenletek

2601. Valamely mágneses tér $Z$ irányú komponense ismert. Kérdés: milyen menetsűrűségű körhengeres $Z$ tengelyű tekercs állítja elő a szóban forgó mágneses teret?

*Útmutatás:* $r$ sugarú körvezetőn áthaladó $I$ intenzitású áram által létesített mágneses tér $Z$ irányú komponense a $(0, 0, z)$ pontban

$$H(z) = \frac{r^2}{2}\,\frac{I}{\sqrt{r^2 - (z - \zeta)^2}^{\,3}},$$

feltéve, hogy a körvezető síkja merőleges a $Z$ tengelyre, középpontja pedig a $(0, 0, \zeta)$ pontban fekszik. A feladat integrálegyenletre vezet, melyet FOURIER-transzformációval lehet megoldani. Felhasználandó az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iut}}{\sqrt{1+t^2}^{\,3}}\, dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} |u|\, H_1^{(1)}(i|u|)$$

képlet ($H_1^{(1)}$ az első HANKEL-függvény).

2602. Adjuk meg az ún. GAUSS-transzformáció:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(x-y)^2} \varphi(y)\, dy = f(x)$$

inverz formuláját.

*Útmutatás:* Ugyanúgy járunk el, mint a 2601. alatti feladat integrálegyenleteinek megoldásánál.

$$\mathfrak{F}\{e^{-h^2t^2}\} = \frac{1}{h\sqrt{2}} e^{-\frac{u^2}{4h^2}}.$$

2603. A stellárstatisztikában nagy szerepet játszik a következő ún. SCHWARZSCHILD-féle integrálegyenlet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x+y)\, \varphi(y)\, dy = f(x). \quad [K(t) \in L^2(-\infty, +\infty)]$$

Keressük meg ennek a megoldását!

Megjegyzés. Erre az integrálegyenletre például a következő feladat kapcsán juthatunk: A térfogategységben levő csillagok száma legyen $D(r)$, ahol $r$ jelenti a naptól mért távolságot. $B(h)\, dh$ legyen ama összes csillagok száma, melyek látszólagos fényessége $h$ és $h + dh$ közé esik. A $B$ és $D$ függvények között fennáll a

$$B(h) = 4\pi \int_0^{\infty} D(r)\, \varphi(h r^2)\, r^4\, dr$$

összefüggés. A $\varphi$ függvény a következőt jelenti: $r$ távolságban a térfogategységben levő ama csillagok száma, melyek abszolút fényessége $p$ és $p + dp$ között van, éppen $\varphi(p)\, dp$. Ha $r = e^{-\varrho}$, $h = e^{-2\mu}$, $p = e^{-2\lambda}$, $\lambda = \mu + \varrho$; $4\pi D(r)\, r^5 = f(\varrho)$, $\varphi(p) = g(\lambda)$, $B(h) = b(\mu)$ jelölést használjuk, akkor az előbbi összefüggés a

$$b(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mu + \varrho)\, f(\varrho)\, d\varrho$$

alakú SCHWARZSCHILD-féle egyenletbe megy át.

*Útmutatás:* A megoldás módszere ugyanaz, mint az előző két feladaté.

2604. Határozzuk meg az

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}\right) \varphi(y)\, dy = f(x)$$

első fajú integrálegyenlet egy négyzetesen integrálható megoldását.

*Útmutatás:* Az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk végig $\ln \left|\frac{z^2 - x^2}{x^2}\right|$ függvénnyel, integráljunk $x$ szerint, és cseréljük fel az integrálok sorrendjét. A belső integrált differenciáljuk $y$ szerint.

2605. A matematikai fizikában és az égi mechanikában nagy szerepet játszik az alábbi HOPF-féle integrálegyenlet:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\infty H(|\, x - y\,|)\, \varphi(y)\, dy.$$

$H(t)$ legyen a $t \geqq 0$ tartományban definiált, legfeljebb véges sok hely kivételével mindenütt folytonos függvény. Létezzék olyan $A > 0$ szám, melyre a

$$p(\alpha) = 2\int_0^\infty H(t)\, \mathrm{ch}\, \alpha\, t\, dt$$

integrál konvergens, ha $0 \leqq \alpha < A$, és divergens, ha $\alpha = A$. Bizonyítsuk be, hogy a HOPF-féle integrálegyenlet sajátértéke minden a

$$0 < \lambda < \frac{1}{2\int_0^\infty H(t)\, dt}$$

számközbe eső szám. Minden ilyen $\lambda$ számhoz található $\varphi(x)$ a $0 < x$ tartományban folytonos sajátfüggvény, mely az

$$e^{\alpha x} - 1 < \varphi(x) < e^{\alpha x} \qquad (x \geqq 0)$$

egyenlőtlenségnek tesz eleget.

*Megoldás.* Minden $\lambda \in [0, A]$ értékhez egy és csakis egy $\alpha$ tartozik, éspedig úgy, hogy

$$\lambda(\alpha) = \frac{1}{p(\alpha)}.$$

Az egyértelműség abból következik, hogy $\lambda(\alpha)$ monoton csökkenő. Nyilván

$$e^{\alpha x} = \lambda(\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} H(|\, x - y\,|)\, e^{\alpha x}\, dy,$$

azért

$$L(e^{ax}) = \lambda \int_0^\infty H(|x-y|)\, e^{ay}\, dy \leqq e^{ax}.$$

Ennek felhasználásával

$$e^{ax} - 1 \leqq \lambda \int_0^\infty H(|x-y|)\,(e^{ax}-1)\, dy = L(e^{ax}-1).$$

Ha az

$$L[L(\varphi)] = L_2(\varphi); \quad L[L_2(\varphi)] = L_3(\varphi); \quad \ldots$$

jelölést használjuk, akkor az adódik, hogy $L_n(e^{ax})$ minden $x$ mellett monoton csökkenő és $L_n(e^{ax}-1)$ monoton növekedő sorozatot ad. Ezenkívül

$$L_n(e^{ax}) - L_n(e^{ax}-1) = L_n(1) > 0$$

és

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}-1}{e^{ax}} = 1$$

$\lim\limits_{n\to\infty} L_n(e^{ax})$ és $\lim\limits_{n\to\infty} (e^{ax}-1)$ léteznek minden $x$-re. Be kell bizonyítani, hogy ez a két limes közös határfüggvény, mely kielégíti az integrálegyenletet.

Ehhez először azt verifikáljuk, hogy

$$0 < L(1) < 1,$$

és ebből $L_{n+1}(1) < L_n(1)$-re következtetünk. Ha

$$f(x) = e^{ax} + L(1),$$

akkor

$$0 < L(f) < f.$$

Az

$$M_n = \mathrm{Max}\, \frac{L_n(1)}{f(x)}$$

számsorozat monoton fogyó. Mivel $\frac{L_n(1)}{f(x)} < \frac{1}{f(x)} \to 0$, ha $x \to \infty$, azért $\frac{L_n(1)}{f(x)}$ maximumát valamely véges $x_n$ helyen veszi fel. Ha az $x_n$ számsorozat felülről nem lenne korlátos, akkor ebből az következne, hogy $\lim M_n = 0$ lenne. Ellenkező esetben

$$M_{n+1} = \left[\frac{1}{f(x)} L\left(f \frac{L_n(1)}{f}\right)\right]_{x=x_{n+1}} \leqq M_n \left[\frac{L(f)}{f}\right]_{x=x_{n+2}} \leqq M_n\, \vartheta,$$

ahol $\vartheta = \max L(f)/f$, ami nyilván 1-nél kisebb, a független változó azt a véges intervallumot futja be, ahol az $x_n$ számok fekszenek. De akkor $M_{n+1} < M_1 \vartheta^n$, tehát ez esetben is $M_n \to 0$. Vagyis minden intervallumban $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(1) = 0$ egyenletesen. Ebből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} L_n(e^{ax}) = \lim_{n\to\infty} L(e^{ax}-1) = \varphi(x)$$

létezik. Ez a szóban forgó homogén integrálegyenletnek megoldása, mert

$$L_{n+1}(e^{ax}-1)=L\,[L_n(e^{ax}-1)]\leqq L(\varphi)\leqq L\,[L_n(e^x)]=L_{n+2}(e^{ax}).$$

Minthogy egyenlőtlenség bal és jobb oldali tagja egyenletesen ugyanahhoz a $\varphi$ függvényhez konvergál (ha $n\to\infty$), azért

$$\varphi(x)=L(\varphi).$$

**2606.** Előfordulhat-e, hogy $\dfrac{1}{2\int\limits_0^\infty H(t)\,dt}$ a 2605. feladatban szereplő HOPF-féle integrálegyenletnek sajátértéke?

**2607.** Oldjuk meg az alábbi ún. MILNE-féle integrálegyenletet:

$$\varphi(x)=\lambda\int\limits_0^\infty H(|\,x-y\,|)\,\varphi(y)\,dy,$$

ahol

$$H(t)=\int\limits_t^\infty \frac{e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi.$$

## 2.7. Hővezetésre vonatkozó feladatok

Ha a $T$ hőfok az időn kívül csak az $(x, y)$ koordinátáktól függ, akkor fennáll a következő differenciálegyenlet:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=-\frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t}. \qquad (2.7.1)$$

Ezzel kapcsolatos DIRICHLET-feladat abban áll, hogy meghatározandó a (2.7.1) olyan, az $\Omega$ síktartományban első és második deriváltjával folytonos $T$ megoldása, melyre

$$T(x,y;\,0)=F(x,y), \qquad (2.7.2)$$

és $T(x,y;\,t)=f(x,y,t)$, ha $x,y\in l$, ahol $l$ az $\Omega$ peremét jelenti. Az $l$ perem görbe legyen sima és folytonos görbületű.

*Kettős réteg hőpotenciálján* értjük a következő integrált

$$U(x,y;\,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^t\Bigg[\int\limits_{(l)}\frac{\mu(s,\tau)}{(t-\tau)^2}\,e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\,r\cos(r,n)\,ds\Bigg]d\tau, \qquad (2.7.3)$$

ahol $n$ a görbe külső normálisát, $r$ pedig a kerület $s$ paraméterhez tartozó pontjának az $(x, y)$ ponttól mért távolságát jelenti. $\mu$ függvény a potenciál sűrűsége.

A kettős réteg hőpotenciáljának a következő alapvető tulajdonságai vannak:

*a)* $\Omega$-ban és $\Omega$-n kívül $U(x, y;\, t)$ minden deriváltjával együtt folytonos, és kielégíti a (2.7.1) differenciálegyenletet.

*b)* $U(x,y;\,t)\equiv 0$,

*c)* $\lim\limits_{x,\,y\to s} U(x,y;\,t)=U_b(s,t)=$

$$=-\mu(s,t)+\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^t\Bigg[\int\limits_{(l)}\frac{\mu(\sigma,\tau)}{(t-\tau)^2}\,e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\,r\cos(n,r)\,d\sigma\Bigg]d\tau, \qquad (2.7.4)$$

ha $(x, y)$ az $\Omega$ *belsejéből* tart a perem pontjához, és

$$\lim_{x, y \to s} U(x, y; t) = U_k(s, t) = \mu(s, t) +$$

$$+ \frac{1}{4 \pi a^2} \int_0^t \left[ \int_{(l)} \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t - \tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(n, r)\, d\sigma \right] d\tau, \tag{2.7.5}$$

ha $(x, y)$ az $\Omega$-n *kívülről* tart a perem $s$ pontjához.

*d)* $\frac{\partial U}{\partial n}$ folytonos az $l$ peremgörbén való áthaladáskor.

*Egyszerű réteg hőpotenciálján* a következő integrált értjük:

$$V(x, y; t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \left[ \int_{(l)} \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{t - \tau} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma \right] d\tau. \tag{2.7.6}$$

A $\varrho(\sigma, \tau)$ függvény az egyszerű réteg sűrűsége. Az egyszerű réteg hőpotenciáljának a következő alapvető tulajdonságai vannak:

*a)* Kielégíti a (2.7.1) differenciálegyenletet,

*b)* $V(x, y; 0) \equiv 0$,

*c)* $V(x, y; t)$ az $l$ peremgörbén való áthaladáskor folytonos,

*d)* $n$ jelentse ismét $l$ *külső* normálisát, akkor

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_b = \varrho(s, t) - \frac{1}{4 \pi a^2} \int_0^t \left[ \int_{(l)} \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{(t - \tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(n, r)\, d\sigma \right] d\tau \tag{2.7.7}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_k = -\varrho(s, t) - \frac{1}{4 \pi a^2 t} \int_0^t \left[ \int_{(l)} \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{(t - \tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(n, r)\, d\sigma \right] d\tau. \tag{2.7.8}$$

A (2.7.1) alatti differenciálegyenletnek egy a $T(x, y; 0) = F(x, y)$ feltételnek eleget tevő partikuláris megoldása a következő:

$$T_0(x, y; t) = \frac{1}{4 \pi a^2 t} \iint_{\Omega} F(\xi, \eta)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}} d\xi\, d\eta. \tag{2.7.9}$$

## *Feladatok*

**2701.** Vezessük vissza a hővezetés (2.7.1) alatti differenciálegyenletre vonatkozó belső DIRICHLET-feladatot másodfajú FREDHOLM-típusú integrálegyenletre. A kezdeti és peremfeltételek (2.7.2) alatt adottak.

**2702.** Vezessük vissza a hővezetés (2.7.1) alatti differenciálegyenletére vonatkozó külső DIRICHLET-feladatot FREDHOLM-típusú integrálegyenletre. A kezdeti és peremfeltételek (2.7.2) alatt adottak.

**2703.** A hőterjedés elméletében fontos szerepet játszik az alábbi probléma: Keressük a (2.7.1) differenciálegyenletnek azt az integrálját, mely a $T(x, y;\ 0) = F(x, y)$ kezdeti és a

$$\frac{\partial T}{\partial n} + h(s)\, T(s, t) = f(s, t)$$

peremfeltételnek tesz eleget [$h(s)$ az $l$ peremgörbén adott, folytonos függvény]. Vezessük vissza ezt a problémát egy másodfajú FREDHOLM-féle integrálegyenletre!

**2704.** Bizonyítsuk be, hogy a **2701.** és a **2702.** feladatok eredményeképpen nyert integrálegyenletek megoldhatók a szukcesszív approximáció módszerével, feltéve, hogy az $l$ peremgörbe konvex.

# MEGOLDÁSOK

**1101.** A BUNJAKOVSZKIJ–SCHWARZ egyenlőtlenség alapján bármely $\varphi \in L^2(0, 1)$-re

$$\| \mathcal{K} \varphi \|^2 = \int_0^1 \Big[ \int_0^1 K(x, y)\, \varphi(y)\, dy \Big]^2 dx \leqq \int_0^1 \int_0^1 K(x, y)^2\, dx\, dy \cdot \int_0^1 \varphi^2(y)\, dy.$$

$$M = \Big( \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, y)\, dx\, dy \Big)^{1/2}$$

**1102.** Az **1101.** alapján

$$\| \mathcal{K} \varphi_n \| \leqq M \, \| \varphi_n \|.$$

**1103.**

$$\mathcal{K} \mathcal{E} \varphi = \mathcal{K}(\mathcal{E} \varphi) = \mathcal{K} \varphi \quad \text{és} \quad \mathcal{E} \mathcal{K} \varphi = \mathcal{E}(\mathcal{K} \varphi) = \mathcal{K} \varphi,$$

azaz

$$\mathcal{E} \mathcal{K} = \mathcal{K} \mathcal{E} = \mathcal{K}.$$

**1104.** $(\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2)(\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2)^{-1} = \mathcal{E}$

ebből ($\mathcal{T}_1^{-1}$-gyel előlről végigszorozva az egyenletet)

$$\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2)^{-1} = \mathcal{T}_1^{-1} \quad \text{és} \quad (\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2)^{-1} = \mathcal{T}_2^{-1} \mathcal{T}_1^{-1}.$$

**1105.**

1°. $\mathcal{K} \varphi = f_1 + f_2$ egyenértékű a $\mathcal{K} \varphi_1 = f_1$, $\mathcal{K} \varphi_2 = f_2$ egyenletrendszerrel.

2°. $\mathcal{K} \varphi = c f$ egyenletből $\varphi = \mathcal{K}^{-1} c f$ és $\mathcal{K} \frac{1}{c} \varphi = f$, amiből $\varphi = c \mathcal{K}^{-1} f$.

**1106.** Integráloperátorok, mert az integrálások sorrendje felcserélhető.

$$\mathcal{K} \mathcal{L} = \frac{x}{2} + \frac{y}{3}; \quad \mathcal{L} \mathcal{K} = \frac{x}{3} + \frac{y}{2}.$$

**1107.** $[\boldsymbol{u}(P), \boldsymbol{u}^*(P)]$ mátrix determinánsa az $\boldsymbol{u}$ komponenseinek GRAMM-féle determinánsa, azért az állítás megfordítása is igaz.

**1201.** Ha az inhomogén egyenlet egy megoldása $\varphi$, a megfelelő homogén egyenleté $\Phi$, akkor $\varphi + \Phi$ is megoldása az inhomogén egyenletnek. Az általános megoldás $\varphi + \Phi$, ahol $\Phi$ befutja a $b_1(Q), b_2(Q), \ldots, b_n(Q)$ függvényekre ortogonális függvények halmazát, ti. az inhomogén egyenlet két különböző megoldásának különbsége a homogén egyenlet megoldása.

**1202.** A feltevés szerint például

$$a_n = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_{n-1} a_{n-1}, \qquad (c_i \text{ állandók})$$

tehát

$$K(P, Q) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(P) b_i(Q) + a_n(P) b_n(Q) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(P) b_i(Q) +$$

$$+ c_1 a_1(P) b_n(Q) + \dots + c_{n-1} a_{n-1}(P) b_n(Q) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(P) [b_i(Q) + c_i b_n(Q)].$$

**1203.**

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{21} & \dots & -\lambda a_{n1} \\ -\lambda a_{12} & 1 - \lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{1n} & -\lambda a_{2n} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D(P, Q; \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & a_1(P) & a_2(P) & \dots & a_n(P) \\ b_1(Q) & 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{21} & \dots & -\lambda a_{n1} \\ b_2(Q) & -\lambda a_{12} & 1 - \lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n(Q) & -\lambda a_{1n} & -\lambda a_{2n} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix},$$

ahol

$$a_{ik} = (a_i, b_k).$$

**1204.**

$$\varphi = \lambda \mathcal{K} \varphi = \lambda \, \mathfrak{a}(P) [\mathfrak{b}(Q), \varphi]; \qquad \varphi \text{ tehát } c\mathfrak{a}(P) \text{ alakú.}$$

**1205.** Jelen esetben $a_{ik} = (a_i, a_k) = a_{ki}$, tehát $D(\lambda)$ valós együtthatós szekuláris egyenlet (l. a **1303.** feladatot), ennek minden gyöke valós.

**1206.** A sajátértékek a $D(\lambda) = 0$ egyenlet megoldásai, $D(\lambda)$ legfeljebb $n$-ed fokú polinom, mely különböző gyökeinek száma $\leqq n$.

**1207.** Az **1204.** feladat értelmében a $K$ mag bármely sajátfüggvénye

$$\varphi_1(P) = c_1 a_1(P) + c_2 a_2(P) + \dots + c_n a_n(P)$$

alakba írható. Ebből például

$$a_1(P) = \alpha_1 \varphi_1(P) + \alpha_2 a_2(P) + \dots + \alpha_n a_n(P)$$

és így

$$K(P, Q) = \varphi_1(P) \psi_1(Q) + a_2(P) h_2(Q) + \dots + a_n(P) h_n(Q).$$

A

$$K^{(2)}(P, Q) = a_2(P) h_2(Q) + \dots + a_n(P) h_n(Q)$$

magra ismételjük meg az eljárást: $K^{(2)}$ sajátfüggvénye $\varphi_2(P) = d_2 a_2(P) + \dots + d_n a_n(P)$ alakú, ebből például

$$a_2(P) = \beta_2 \varphi_2(P) + \beta_3 a_3(P) + \dots + \beta_n a_n(P),$$

és így

$$K^{(2)}(P, Q) = \varphi_2(P) \psi_2(Q) + a_3(P) l_3(Q) + \dots + a_n(P) l_n(Q)$$

s. í. t. Végül

$$K(P, Q) = \varphi_1(P)\, \psi_1(Q) + \dots + \varphi_n(P)\, \psi_n(Q)$$

alakban van felírva. A konstrukció miatt

$$\mathcal{K}\, \varphi_1 = \mu_1\, \varphi_1,$$

ami csak úgy lehet, ha $(\varphi_1, \psi_i) = 0$ $(i = 2, 3, \dots, n) \cdot \varphi_2$ konstrukciója miatt

$$\mathcal{K}^{(2)}\, \varphi_2 = \mu\, \varphi_2,$$

amiből $(\varphi_2, \psi_i) = 0$ $(i = 3, 4, \dots n)$ következik s. í. t.

1208. $D(\lambda) = (1 - a_{11}\lambda)(1 - a_{22}\lambda) \dots (1 - a_{nn}\lambda)$, ahol $a_{ii} = (\varphi_i, \psi_i)$. A sajátértékek tehát

$$\lambda_i = \frac{1}{a_{ii}}, \quad (\text{ha } a_{ii} \neq 0).$$

1209. Transzformáljuk $K$-t redukált alakra, akkor a FREDHOLM-determináns

$$D(\lambda) = (1 - a_{11}\lambda)(1 - a_{22}\lambda) \dots (1 - a_{nn}\lambda)$$

alakú. Ha $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, akkor $D(\lambda)$ pontosan $n$-ed fokú, ezzel szemben $D(P, Q; \lambda)$ az **1203.** feladat alapján legfeljebb $(n - 1)$-ed fokú. Így tehát

$$R(P, Q; \lambda) \to 0, \quad \text{ha} \quad \lambda \to \infty.$$

Ha viszont $D(\lambda)$ fokszáma $p < n$, ez csak úgy lehet, ha például $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{pp}$ zérustól különböző, a többi $a_{ii} = 0$. De ekkor az **1203.** feladat megoldásában megállapított $D(P, Q; \lambda)$ polinom fokszáma nem lehet kisebb, mint $p$, hiszen már $\varphi_1(P)\, \psi_1(Q)$ együtthatójának fokszáma $p$. De akkor $R(P, Q; \lambda)$ vagy a végtelenhez, vagy egy 0-tól különböző véges számhoz tart, ha $\lambda \to \infty$.

1210. Mivel $K$ FREDHOLM-determinánsa (I.2.16)

$$D(\lambda) = |\, \boldsymbol{I} - \lambda\, [\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}]\, |,$$

a $K^*$ magé

$$D^*(\lambda) = |\, \boldsymbol{I} - \lambda\, [\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}]\, |,$$

és $|\, \boldsymbol{I} - \lambda\, [\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}]| = |\, \boldsymbol{I} - \lambda\, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\,]|$, ezért $D(\lambda) \equiv D^*(\lambda)$, amiből az állítás evidens

1211. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy a különböző $\lambda_i$ sajátértékekhez tartozó $\varphi_i(P)$ sajátfüggvények nem lennének lineárisan függetlenek, akkor léteznék olyan $\boldsymbol{A} \neq 0$ vektor, melyre

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\varphi}(P) = 0,$$

ahol $\boldsymbol{\varphi}(P)$ a $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ komponensekkel bíró vektorfüggvény. De a sajátfüggvény fogalma miatt

$$0 = \sum_{i=1}^{n} A_i\, \varphi_i(P) = \mathcal{K}\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, A_i\, \varphi_i\Big) = \mathcal{K}\, \Phi, \quad \text{ahol} \quad \Phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, A_i\, \varphi_i(P).$$

Ha most $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0$, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\varphi}$ $\lambda_n$-szeresét $\Phi$-ből levonjuk, adódik a

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_n)\, A_i\, \varphi_i$$

függvény. De

$$\mathcal{K}\Phi = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_n) A_i \mathcal{K} \varphi_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_n) A_i \lambda_i^{-1} \varphi_i.$$

Másrészt láttuk, hogy $\mathcal{K}\Phi = 0$, ami azt jelenti a $\lambda_i \neq \lambda_n$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ feltevés miatt, hogy már $(n-1)$ sajátfüggvény sem lineárisan független. Ezt az eljárást folytatva, arra a következtetésre jutunk, hogy $\varphi_i \equiv 0$, ami ellenkezik a sajátfüggvény fogalmával.

1212. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ miatt

$$\mathcal{K}\varphi = u_1 \sin x + u_2 \cos x$$

alakú bármely $\varphi$ mellett. Tehát $u_1 \sin x + u_2 \cos x \equiv \sin x$ azonosságból

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 0,$$

azaz

$$u_1 = 1 = \int_0^{2\pi} \cos y\, \varphi(y)\, dy \quad \text{és} \quad u_2 = 0 = \int_0^{2\pi} \sin y\, \varphi(y)\, dy.$$

Ennek a két követelménynek eleget tesz a $\varphi(y) = \frac{1}{\pi} \cos y$ függvény. Ha ehhez hozzáadunk egy tetszőleges $\sin x$-re és $\cos x$-re ortogonális függvényt, az egyenlet további megoldását kapjuk.

1213. $\varphi(y) = 4e^y$ [+ $e^{-y}$-ra (0, 1)-ben ortogonális függvény].

1214. $\varphi(y) = 1 + \frac{50}{7} y + \frac{15}{2} y^2$ [+ $(1; y; y^3)$ függvényekre $(-1, +1)$-ben ortogonális függvények].

1215. Az egyenletnek nincs megoldása, mert bármely $\varphi$ mellett a bal oldal trigonometrikus polinom, a jobb oldal racionális egész függvény.

1216. $\varphi(x) = x - 4 \sin x - 2 \sin 2x$.

1217. $\varphi(x) = x$.

1218. $\varphi(x) = -\frac{5}{2} x$.

1219. $\varphi(x) = c\,x - 2$ ($c$ tetszőleges állandó). 3 tehát az $x\,u$ mag sajátértéke!

1220. $\varphi(x) = c\,x$ ($c$ tetszőleges állandó). A $\lambda = 3$-hoz tartozó sajátfüggvény $\Phi(x) = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

1221. Jelen esetben $[\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}] = a_{11} = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$, tehát

$$D(\lambda) = |\boldsymbol{I} - \lambda [\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}]| = 1 - \frac{\lambda}{3}; \quad R(x, u; \lambda) = \frac{3\,x\,u}{3 - \lambda}.$$

1222. $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{\pi} (c_1 \sin x + c_2 \sin 2x)$.

($c_1$, $c_2$ tetszőleges állandók.) Miért van ennek a másodfajú egyenletnek végtelen sok megoldása?

1223. $\varphi(x) = c\, e^x$. (c tetszőleges állandó.)

1224. $\varphi(x) \equiv 0$. Mit jelent ez?

1225. $u(x) = x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{5}{12}$.

1226. $\lambda = 2$.

1227. $\int_0^1 y\,F(y) = 0;\quad \varphi(x) = F(x) + c$.

1228. $\lambda_1 = -6 + 4\sqrt{3};\ \lambda_2 = -6 - 4\sqrt{3}$,

$$\varphi_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\,x + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}};\quad \varphi_2(x) = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\,x + \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

1229. $\boldsymbol{a}(x) = (x, 1);\ \boldsymbol{b}(y) = (1, y)$

$$[\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{I} - \lambda[\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}] = \begin{bmatrix} 1-\frac{\lambda}{2} & -\lambda \\ -\frac{1}{3} & 1-\frac{\lambda}{2} \end{bmatrix},$$

$$[\boldsymbol{I} - \lambda\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}]^{-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \frac{\lambda^3}{3}} \begin{bmatrix} 1-\frac{\lambda}{2} & \lambda \\ \frac{\lambda}{3} & 1-\frac{\lambda}{2} \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{I} - \lambda[\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}])^{-1}\cdot\boldsymbol{b} = \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{3}} \left(1-\frac{\lambda}{2}+\lambda y,\ \ \frac{\lambda}{3} + \left(1-\frac{\lambda}{2}\right)y\right).$$

Így

$$R(x, y; \lambda) = (\boldsymbol{I} - \lambda[\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}])^{-1}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = \frac{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)(x+y) + \lambda\,x\,y + \frac{\lambda}{3}}{\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{3}}$$

$$(\lambda \neq -6 + 4\sqrt{3};\ \ -6 - 4\sqrt{3}).$$

1230. A mag sajátértékei

$$\lambda_1 = \frac{2}{\pi},\quad \lambda_2 = -\frac{2}{\pi}.$$

$z_1(u) = \mu \sin u,\ \ z_2(u) = \nu \cos u$ ($\mu$ és $\nu$ tetszőleges számok).

1231. $\lambda_1 = 12,\ \varphi_1 \equiv 1,\ \varphi_2 = x\sqrt{12} - \sqrt{3}$.

1232. $R(x, y; \lambda) = \frac{12}{12-\lambda}\left(xy - \frac{x+y}{3} + \frac{1}{3}\right)$.

1233. $\varphi(x, y) = -\frac{23}{81} - \frac{4}{9}(xy - x - y).$

1234. A szóban forgó magnak nincsenek sajátértékei, mert

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\,\alpha_{11} & -\lambda\,\alpha_{21} \\ -\lambda\,\alpha_{12} & 1 - \lambda\,\alpha_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 - \lambda \int\limits_{-1}^{+1} P_0(x)\,P_1(x)\,dx & -\lambda \int\limits_{-1}^{+1} P_2(x)\,P_1(x)\,dx \\ -\lambda \int\limits_{-1}^{+1} P_3(x)\,P_0(x)\,dx & 1 - \lambda \int\limits_{-1}^{+1} P_2(x)\,P_3(x)\,dx \end{vmatrix} = 1$$

a LEGENDRE-polinomok ortogonalitása miatt. A $D(\lambda) = 0$ egyenletnek tehát nincsenek gyökei.

1235. Vegyük figyelembe, hogy

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos n\,x + n\cos(n-2)\,x + \binom{n}{2}\cos(n-4)\,x + \ldots + \binom{n}{\frac{n}{2}}\right], \text{ ha } n$$

páros

$$\text{és}\quad \cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos n\,x + \binom{n}{1}\cos(n-2)\,x + \binom{n}{2}\cos(n-4)\,x + \ldots + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{\frac{n+1}{2}}\cos x\right], \text{ ha } n \text{ páratlan.}$$

$x$ helyébe $(x - y)$-t helyettesítve, azonnal leolvasható, hogy

$$\lambda_r = \frac{2^{n-1}}{\pi}\,\frac{1}{\binom{n}{r}};\quad \varphi_r(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(n-2r)\,x;\quad \psi_r(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(n-2r)\,x.$$

1236. $L(u, v) = \sin u\,v = uv - \frac{u^3 v^3}{6} + \frac{u^5 v^5}{12} \mp \ldots.$

Legyen

$$K(u, v) = u\,v - \frac{u^3 v^3}{3},$$

és oldjuk meg az alábbi integrálegyenletet

$$y(u) - \int\limits_0^{0,5}\left(u\,v - \frac{u^3 v^3}{3}\right) y(v)\,dv = f(u).$$

Ez elfajult magú egyenlet, megoldása:

$$y(u) = f(u) + 1{,}043\,277\,[1{,}000\,186\, b_1\, u - 0{,}001\,041\,6\, b_1\, u^3 - 0{,}001\,041\,6\, b_2\, u - \\ - 0{,}159\,722\,2\, b_2\, u^3],$$

ahol

$$b_1 = \int_0^{0,5} u\, f(u)\, du, \quad b_2 = -\frac{1}{6}\int_0^{0,5} u^3 f(u)\, du.$$

A hibabecslés elvégzése miatt képezzük a $K$ rezolvensét: $(\lambda = 1)$

$$R(u, v;\ 1) = 1{,}043\,277\,[1{,}000\,186\, u\, v - 0{,}001\,041\,6\, u^3\, v - 0{,}001\,041\,6\, u\, v^3 - \\ - 0{,}159\,722\,2\, u^3\, v^3].$$

$$\int_0^{0,5} |\, R(u, v;\ 1)\,|\, dv < \frac{1}{12} = B.$$

Továbbá

$$\int_0^{0,5} |\, L(u, v) - K(u, v)\,|\, dv \leqq \frac{1}{120}\, u^5 \int_0^{0,5} v^5\, dv = \frac{u^5}{46\,080}.$$

Mivel $0 \leqq u \leqq 0{,}5$, azért

$$h = \frac{1}{1\,474\,560} \approx 0{,}75 \cdot 10^{-6}.$$

(1.2.21) szerint tehát

$$|\varphi(u) - y(u)\,| < N \frac{0{,}75 \cdot 10^{-6}\left(1 + \frac{1}{12}\right)^2}{1 - 0{,}75 \cdot 10^{-6}\left(1 + \frac{1}{12}\right)} < 10^{-6} \cdot N,$$

ahol $N$ az $f(u)$ felső korlátja.

**1237.** Az egyenletből világos, hogy

$$\mu(\pi - t) = \mu(-t) = \mu(t)$$

feltéve, hogy az egyenletnek van megoldása!). A mag és a zavaró függvény periodicitása miatt elég a $\mu$ függvényt $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-ben meghatározni. Legyen $n = 12$, $\Delta x_i = \frac{\pi}{6}$.

A közelítő egyenlet:

$$g(t) + \frac{\pi}{6}\sum_{n=1}^{12} \frac{1}{6{,}8 - 3{,}2\cos\left[t + (n-6)\frac{\pi}{6}\right]}\, g\left((n-6)\frac{\pi}{6}\right) = 25 - 16\sin^2 t.$$

Ha

$$t = (n - 6)\frac{\pi}{6} = \frac{n\,\pi}{6} - \pi,$$

figyelembe véve azt, hogy

$$g\left((n-6)\frac{\pi}{6}\right)=g\left(\frac{n\pi}{6}-\pi\right)=g\left(\pi-\frac{n\pi}{6}\right)=g\left(n\frac{\pi}{6}\right),$$

elegendő

$$g(0)=y_1;\ g\left(\frac{\pi}{6}\right)=y_2;\ g\left(\frac{2\pi}{6}\right)=g\left(\frac{\pi}{3}\right)=y_3;\ g\left(\frac{3\pi}{6}\right)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=y_4$$

értékeket kiszámítani, mert

$$g\left(\frac{4\pi}{6}\right)=g\left(\frac{2\pi}{3}\right)=g\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=g\left(\frac{\pi}{3}\right)=y_3,$$

$$g\left(\frac{5\pi}{6}\right)=g\left(\pi-\frac{5\pi}{6}\right)=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=y_2,$$

$$g\left(\frac{6\pi}{6}\right)=g(\pi)=g(0)=y_1.$$

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
1{,}19\,y_1+0{,}35\,y_2+0{,}31\,y_3+0{,}15\,y_4&=25\\
0{,}18\,y_1+1{,}34\,y_2+0{,}32\,y_3+0{,}16\,y_4&=21\\
0{,}16\,y_1+0{,}32\,y_2+1{,}34\,y_3+0{,}18\,y_4&=13\\
0{,}15\,y_1+0{,}31\,y_2+0{,}35\,y_3+1{,}19\,y_4&=9.
\end{aligned}$$

Ebből

$$y_1=16{,}04;\quad y_2=12{,}27;\quad y_3=4{,}73;\quad y_4=0{,}94.$$

$\mu(t)$ periodicitása miatt trigonometrikus interpolációt használunk. Mivel $\mu(t)$ páros, és $\mu(\pi-t)=\mu(t)$, ezért az interpoláló trigonometrikus polinom alakja:

$$g(t)=\sum_{k=0}^{3} a_k\cos 2\,k\,t.$$

$$\begin{aligned}
g(0)&=16{,}04=a_0+a_1+a_2+a_3\\
g\left(\frac{\pi}{6}\right)&=12{,}27=a_0+a_1\cos\frac{\pi}{3}+a_2\cos\frac{2\pi}{3}+a_3\cos\pi\\
g\left(\frac{\pi}{3}\right)&=4{,}73=a_0+a_1\cos\frac{2\pi}{3}+a_2\cos\frac{4\pi}{3}+a_3\cos 2\pi\\
g\left(\frac{\pi}{4}\right)&=0{,}94=a_0+a_1\cos\pi+a_2\cos 2\pi+a_3\cos 3\pi.
\end{aligned}$$

Ebből

$$a_0=8{,}50;\quad a_1=0;\quad a_2=7{,}54;\quad a_3=0.$$

A keresett közelítő megoldás

$$\mu(t)\approx g(t)=8{,}50+7{,}54\cos 2t.$$

1238. Jelen esetben $\lambda = \frac{1}{2}$, az intevallum (0, 1), tehát az alapabszcisszák $\xi_1 = 0{,}2113$; $\xi_2 = 0{,}7887$; a GAUSS-féle együtthatók $A_1 = A_2 = 0{,}5$. (1.2.24) egyenletrendszer a mi esetünkben

$$0{,}7386\,\varphi(\xi_1) - 0{,}2958\,\varphi(\xi_2) = 0{,}4434$$
$$-0{,}2954\,\varphi(\xi_1) + 0{,}5343\,\varphi(\xi_2) = 0{,}2384.$$

Ebből

$$\varphi(\xi_1) = 0{,}9997, \qquad \varphi(\xi_2) = 0{,}9990.$$

A keresett közelítő megoldás (1.2.25) szerint

$$\varphi(x) \approx \frac{1}{4}\left[0{,}9997\, e^{0{,}2113\,x} + 0{,}9990\, e^{0{,}7887\,x}\right] + 1 - \frac{e^x - 1}{2x}.$$

Megjegyzés: Az egyenlet pontos megoldása $\varphi(x) \equiv 1$ (erről közvetlen behelyettesítéssel lehet meggyőződni!). Az $x = \xi_1$ helyen a hiba $3 \cdot 10^{-4}$, a $\xi_2$ helyen $10^{-3}$, az $x = 0$ helyen a közelítő érték 0,9997, vagyis itt az eltérés ismét $3 \cdot 10^{-4}$.

1239. $e^{xy} = 1 + xy + \frac{x^2 y^2}{2} + \ldots.$

Legyen $K(x, y) = 1 + xy$, és megoldjuk az eredeti helyett a

$$\psi(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 (1 + xy)\,\psi(y)\,dy = 1 - \frac{e^x - 1}{2x}$$

integrálegyenletet. Ebből

$$\psi(x) = 1{,}4511 + 0{,}219\,85\,x - \frac{e^x - 1}{2x}.$$

1240. A $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}$ és $\psi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-iny}$

($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) függvényrendszerekkel [($-\pi, +\pi$)-ben teljesek!] képezzük a magmátrixot: legyen $n \neq 0$, akkor

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\left(1 + \operatorname{cotg}\frac{x-y}{2}\right) e^{iny}\,dy = \int_{-\pi}^{+\pi} \operatorname{cotg}\frac{x-y}{2}\, e^{iny}\,dy = 2\int_{\frac{x-\pi}{2}}^{\frac{x+\pi}{2}} \operatorname{cotg} t\, e^{in(x-2t)}\,dt =$$

$$= 2e^{inx}\int_{\frac{x-\pi}{2}}^{\frac{x+\pi}{2}} \operatorname{cotg} t\, e^{-2int}\,dt = 2\,e^{inx}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg} t\, e^{-2int}\,dt =$$

$$= -\,2i\,e^{inx}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg} t\,\sin 2nt\,dt = -\,2i\,e^{inx}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\,t + \sin(2n-1)\,t}{\sin t}\,dt =$$

$$= \begin{cases} -2i\,\pi\, e^{inx}, & \text{ha } n > 0 \\ 2i\,\pi\, e^{inx}, & \text{ha } n < 0, \end{cases}$$

mert

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\,t}{\sin t}\,dt = \frac{\pi}{2}. \qquad (n > 0)$$

Így tehát

$$a_{n,m} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-imx}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(1 + \operatorname{cotg}\frac{x-y}{2}\right) \frac{e^{iny}}{\sqrt{2\pi}}\,dy\,dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-i}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq m \\ -i, & \text{ha } n = m > 0 \end{cases} \\[2ex] \dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq m \\ i, & \text{ha } n = m < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Ha pedig $n = 0$, akkor

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left(1 + \operatorname{cotg}\frac{x-y}{2}\right) dy = 1,$$

a magmátrix tehát

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & i & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -i & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

1.2.29)-nek megfelelő lineáris egyenletrendszer $y_0 = f_0$

$$-i\,y_n = f_n, \quad \text{ha} \quad n = 1, \ 2, \dots$$
$$i\,y_n = f_n, \quad \text{ha} \quad n = -1, \ -2, \dots.$$

Ennek megoldása tehát

$$y_0 = f_0; \quad y_n = \frac{-1}{i} f_n = i f_n, \quad \text{ha} \quad n > 0$$

$$y_n = \frac{1}{i} f_n = -i f_n, \quad \text{ha} \quad n < 0.$$

Figyelembe véve $y_n$, $f_n$ jelentését, ezek az egyenletek azt jelentik, hogy a keresett megoldás

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left(1 - \operatorname{cotg}\frac{x-y}{2}\right) f(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \left(1 + \operatorname{cotg}\frac{y-x}{2}\right) f(y)\,dy.$$

1241. Képezzük a magmátrixot:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin y}{\cos y-\cos x}\,\psi_m(y)\,dy=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin y\sin my}{\cos y-\cos x}\,dy=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(m-1)y-\cos(m+1)y}{\cos y-\cos x}\,dy.$$

Az

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos\nu y}{\cos y-\cos x}\,dy=\frac{\sin\nu x}{\sin x}\qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

összefüggés alapján

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin y}{\cos y-\cos x}\,\psi_m(y)\,dy=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos mx=-\varphi_m(x).\qquad (m=1,2,\ldots)$$

Ugyanúgy

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin y}{\cos y-\cos x}\,\varphi_n(x)\,dx=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin ny=-\psi_n(y)\qquad (n=1,2,\ldots)$$

és

$$\int_0^\pi \frac{\sin y}{\cos y-\cos x}\,\varphi_0(x)\,dx=0.$$

Ennélfogva

$$a_{nm}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi_n(x)\int_0^\pi \frac{\sin y}{\cos y-\cos x}\,\psi_m(y)\,dy\,dx=\begin{cases}0, & \text{ha } n=0,\quad m=1,2,\ldots\\ -\delta_{nm}, & \text{ha } n,\ m=1,2,\ldots^{*}\end{cases}$$

A magmátrix tehát:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\\ -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\\ 0 & -1 & 0 & 0 & \ldots\\ 0 & 0 & -1 & 0 & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer

$$f_0=0,\qquad -y_n=f_n.$$

* $\delta_{nm}$ a KRONECKER-féle szimbólumot jelenti: $\delta_{nn}=1$, $\delta_{n,m}=0$, ha $n\neq m$.

$f_0$ jelentését figyelembe véve az egyenletrendszer első egyenlete azt jelenti, hogy

$$f_0 = \int_0^\pi f(x)\,\varphi_0(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi f(x)\,dx = 0$$

Ez tehát a megoldhatóság szükséges feltétele, mely egyúttal elégséges is. Mert ha

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos n\,x,$$

akkor

$$\varphi(x) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n-1}^{\infty} f_n \sin \alpha\,x.$$

Ez azt jelenti, hogy ha van megoldás, az a következő alakú:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos y - \cos x} f(y)\,dy = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos x - \cos y} f(y)\,dy.$$

Ez valóban megoldás, ezt az egyenletbe való helyettesítéssel verifikálhatjuk.

**1242.** Kiindulva a $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin n\,x$; $\psi_0(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\psi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n\,y$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ teljes függvényrendszerekből, az 1241. feladat megoldásánál követett számítást alkalmazva azt kapjuk, hogy a magmátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & & & & \end{bmatrix}.$$

Ennek megfelelő végtelen sok ismeretlenes egyenletrendszer

$$y_2 = f_1, \quad y_3 = f_2, \quad \ldots, \quad y_n = f_{n-1}, \quad \ldots$$

Ez azt jelenti, hogy ha

$$f(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin n\,x,$$

akkor

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos n\,x,$$

ahol $\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi y(t)\,dt$ tetszőleges állandó. Hogy ez fellép, az abból ered, hogy $\varphi(y) = \text{const}$ a megfelelő elsőfajú homogén egyenlet megoldása. Egyenletünk megoldása zárt alakban

$$\varphi(y) = C - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos x - \sin y} f(x)\,dx. \quad (C \text{ tetszőleges állandó.})$$

1243. Legyen $\xi = -a\cos y$, $t = -a\cos x$ $(0 \leqq x, y \leqq \pi)$ $\gamma(-a\cos y) = \varphi(y)$, $\Phi(-a\cos x) = f(x)$.

1244.

$$\pi K(x, y) = \frac{\varrho \sin(x+y)}{1 - 2\varrho\cos(x+y) + \varrho^2} + \frac{\varrho\sin(x-y)}{1 - 2\varrho\cos(x-y) + \varrho^2} =$$

$$= \operatorname{Im}\left[\frac{1}{1 - \varrho\, e^{i(x+y)}} + \frac{1}{1 - \varrho\, e^{i(x-y)}}\right]; \quad \frac{1}{1 - \varrho\, e^{i(x\pm y)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n\, e^{in(x\pm y)}.$$

Ez a sor $x$ és $y$ minden értéke mellett konvergens. A mag tehát

$$K(x, y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n \sin n\,x \cos n\,y.$$

Legyen $\psi_n(y) = \cos n\,y$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, akkor

$$\int_0^\pi K(x, y)\cos n\,y\, dy = \varrho^n \sin n\,x. \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Ha $\varphi_n(x) = \varrho^n \sin n\,x$, akkor a magmátrix elemei:

$$a_{nm} = \int_0^\pi \varphi_n(x)\int_0^\pi K(x, y)\,\psi_m(y)\,dy\,dx = \varrho^n\int_0^\pi \sin n\,x \sin m\,x\,dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi\,\varrho^n}{2}, & \text{ha } n = m \\ 0, & \text{ha } n \neq m. \end{cases}$$

A magmátrix tehát

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\pi\,\varrho}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \dfrac{\pi\,\varrho^2}{2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \dfrac{\pi\,\varrho^3}{2} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}.$$

Egyenletünknek megfelelő egyenletrendszer tehát

$$\frac{\pi\,\varrho^n}{2}\,y_n = f_n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

amiből

$$y_n = \frac{2}{\pi}\,\frac{f_n}{\varrho^n}.$$

A négyzetesen integrálható megoldás létezésének szükséges és elégséges feltétele tehát az, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2}{\varrho^{2n}} < \infty .$$

A megoldás

$$\varphi(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\varrho^n} \cos n x$$

($c_0$ tetszőleges állandó).

**1245.** Legyen

$$I = \int_0^{\pi} \ln \frac{1-\cos(x+y)}{1-\cos(x-y)} \sin n y \, dy = \int_0^{\pi} \ln\,[1-\cos(x+y)] \sin n y \, dy -$$

$$- \int_0^{\pi} \ln\,[1-\cos(x-y)] \sin n y \, dy,$$

akkor

$$\frac{dI}{dx} = \int_0^{\pi} \left[ \frac{\sin(x+y)}{1-\cos(x+y)} - \frac{\sin(x-y)}{1-\cos(x-y)} \right] \sin n y \, dy.$$

$x + y = u$, illetve $x - y = v$ helyettesítés bevezetésével

$$\frac{dI}{dx} = \int_x^{x+\pi} \frac{\sin u}{1-\cos u} \sin(n u - n x)\, du - \int_{x-\pi}^{x} \frac{\sin v}{1-\cos v} \sin(nx - u v)\, dv =$$

$$= \int_{x-\pi}^{x+\pi} \frac{\sin u \sin n u}{1-\cos u}\, du \cdot \cos n x - \int_{x-\pi}^{x+\pi} \frac{\sin u \cos n u}{1-\cos u}\, du \cdot \sin nx.$$

A jobb oldali második integrál eltűnik, az első integráljel alatti kifejezés ismert formula alapján

$$\frac{\sin u \sin n u}{1-\cos u} = 2\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos n u + 1 + \cos u + \cos 2u + \ldots + \cos(n-1)u\right].$$

Ennek alapján tagonkénti integrálás révén

$$\frac{dI}{dx} = -2\pi \cos n x.$$

Tehát

$$I = -\frac{2\pi}{n} \sin n x.$$

**1246.** Miután a mag szimmetrikus, legyen a két azonos alaprendszer:

$$\varphi_n(x) \equiv \psi_n(x) = \sin n x. \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Felhasználva 1245. feladat eredményét, a magmátrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

A megfelelő egyenletrendszer megoldása tehát $y = n f_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ (ahol $f_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \sin n x \, dx$). Ebből következik, hogy ahhoz, hogy négyzetével együtt integrálható megoldása legyen egyenletünknek, szükséges és elégséges, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 f_n^2 < \infty$$

legyen. Ha $\Phi$ az a függvény, melynek FOURIER együtthatói $n f_n$, akkor

$$\varphi(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin y \, \Phi(x)}{\cos x - \cos y} \, dx.$$

**1247.** Páros $n$ esetén a

$$\psi_n(t) = i^{-n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \psi_n(\lambda) \cos \lambda t \, d\lambda$$

ismert relációt felhasználva:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_n(t)}{x - t} \, dt = \frac{i^{-n}}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - t} \left( \int_0^{\infty} \psi_n(\lambda) \cos \lambda t \, d\lambda \right) dt =$$

$$= \frac{i^{-n}}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \psi_n(\lambda) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda t}{x - t} \, dt \right) d\lambda.$$

(Igazoljuk, hogy jogos az integrálások sorrendjének a felcserélése!) De

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda t}{x - t} \, dt = \sin \lambda t \quad \text{és} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{x - t} \, dt = -\cos \lambda t,$$

mert $x - t = u$ helyettesítéssel

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\lambda t}{x-t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\lambda(x-u)}{u}\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\lambda x\cos\lambda u + \sin\lambda x\sin\lambda u}{u}\,du =$$

$$= \sin\lambda u,$$

ti. $\frac{\cos\lambda u}{u}$ páratlan, és $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\lambda u}{u}\,du = 1$ (ugyanígy igazolható a másik képlet is).

Ezért tehát

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi_n(t)}{x-t}\,dt = i^{-n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\psi_n(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda = \varphi_n(x).$$

Teljesen hasonló számolással adódik, hogy

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi_n(t)}{x-t}\,dx = \psi_n(t).$$

Ha viszont $n$ páratlan, akkor

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi_n(t)}{x-t}\,dt = \varphi_n(x) \quad \text{és} \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi_n(x)}{x-t}\,dx = \psi_n(t).$$

Ezenkívül igaz, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(x)^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^2(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(x)\,\psi_m(x)\,dx = 0, \quad \text{ha} \quad n \neq m.$$

A magmátrix tehát

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix}.$$

Ebből következik a bizonyítandó állítás.

1248. Legyen

$$x = \frac{1}{\cos u + 1} - \frac{1}{2}, \quad t = \frac{1}{\cos v + 1} - \frac{1}{2}.$$

Ezen változók bevezetése és az egyenletnek $\sqrt{2x}$-szel való szorzása után az

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\cos v - \cos u}\,\Phi(v)\,dv = F(u)$$

egyenletre jutunk, ahol

$$\Phi(v) = \varphi(t)\sqrt{2t} = \frac{\varphi(t)\sin v}{1+\cos v}$$

$$F(u) = f(x)\sqrt{2x} = \frac{f(x)\sin u}{1+\cos u}\,.$$

A kapott egyenlet **1242.** alatt szerepelt, annak megoldásába $x$ és $t$ változókat visszahelyettesítve, a

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2t}}\left[c - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t+\frac{1}{2}}\;\sqrt{2x}\,f(x)}{\sqrt{x+\frac{1}{2}}\,(t-x)}\,dx\right]$$

eredményhez jutunk. $c$ tetszőleges állandó.

**1249.** A mag szimmetriája miatt $\psi_n(x) \equiv \varphi_n(x)$. Képezzük a magmátrixot:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\,e^{\frac{y^2}{2}}\,\frac{d^n e^{-y^2}}{dy^n}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(y+ix)^2}\,e^{\frac{x^2}{2}}\,\frac{d^n e^{-y^2}}{dy^n}\,dy =$$

$$= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\cdot \frac{d^n e^{\frac{1}{2}(y+ix)^2}}{dy^n}\,dy,$$

és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\,e^{\frac{y^2}{2}}\,\frac{d^n e^{-y^2}}{dy^n}\,dy = i^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,e^{\frac{1}{2}(y+ix)^2}\,dy = i^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}+ixy-\frac{x^2}{2}}\,dy =$$

$$= i^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-ix)^2}\,dy\cdot e^{-x^2}\right) = i^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\cdot e^{-x^2}\right) =$$

$$= i^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(\sqrt{2\pi}\,e^{-x^2}\right).$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\,\varphi_n(y)\,dy = i^n\,\varphi_n(x). \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

A magmátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & i & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

általában

$$a_{mn} = i^m \delta_{mn}.$$

A hozzátartozó egyenletrendszer $i^m y_m = f_m$, ebből $y_m = (-i)^m f_m$. Ezért a FOURIER-féle transzformáció inverz transzformációja ($i$ helyébe $-i$ írandó !)

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x)\, dx.$$

**1250.** Alkalmazni kell **1249.** eredményét, és figyelembe kell venni, hogy páros $f(x)$ esetén

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\, t\, f(x)\, dx = 0,$$

páratlan $f(x)$-nél pedig

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\, t\, f(x)\, dx = 0.$$

**1251.** Szorozzuk végig az egyenletrendszert $\lambda \cos zx$-szel és integráljunk $x$ szerint 0-tól $\infty$-ig, akkor a

$$\lambda \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, p_l + \lambda^2 \frac{\pi}{2} f_k(z) = \lambda \int_0^{\infty} \cos z\, x\, g_k(x)\, dx$$

egyenletrendszerre jutunk, ahol

$$p_k(z) = \int_0^{\infty} \cos z\, x\, f_k(x)\, dx.$$

Ebből

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{A}^{-1} \left[ \lambda\, \boldsymbol{G}(z) - \frac{\pi}{2} \lambda^2 \boldsymbol{F}(z) \right],$$

ahol $\boldsymbol{A}$ az $a_{kl}$ számokból alkotott mátrix, $\boldsymbol{p}$ a $p_l$ számokból alkotott vektor, $\boldsymbol{G}(z) = \left( \int_0^{\infty} \cos z\, x\, g_k(x)\, dx \right)$, $\boldsymbol{F}(z) = (f_k(z))$. Ezt az adott egyenletrendszerbe helyettesítve, az

$$\boldsymbol{A}\, \boldsymbol{F}(z) + \lambda\, \boldsymbol{A}^{-1} \left[ \lambda\, \boldsymbol{G}(z) - \frac{\pi}{2} \lambda^2 \boldsymbol{F}(z) \right] = \Gamma(z)$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk. $\Gamma(z) = (g_k(z))$. Ebből $F$ kiszámítható bizonyos $\lambda$-k mellett.

1252. Ha a

$$\varphi_n(t) = \frac{e^{\frac{t}{2}}}{n!} \frac{d^n (t^n e^{-t})}{dt^n}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

akkor

$$\int_0^\infty e^{-st} \varphi_n(t)\, dt = \frac{\left(s - \frac{1}{2}\right)^n}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^{n+1}} = u^n(1 - u),$$

ahol

$$\frac{s - \frac{1}{2}}{s + \frac{1}{2}} = u, \qquad \text{és} \qquad s = \frac{1}{2} \frac{1 + u}{1 - u}.$$

Ha

$$f(s) = f\left(\frac{1}{2} \frac{1 + u}{1 - u}\right) = g(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots$$

$-1 < u < +1$ számközben konvergens, és $\varphi(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(t)$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n u^n(1 - u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n.$$

Együttható összehasonlítással a következőt kapjuk:

$$\lambda_0 = a_0, \quad \lambda_1 - \lambda_0 = a_1, \quad \lambda_2 - \lambda_1 = a_2, \ldots,$$

ebből

$$\lambda_0 = a_0, \quad \lambda_1 = a_0 + a_1, \quad \lambda_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ldots,$$

vagyis

$$\varphi(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) \varphi_n(t),$$

feltéve, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)^2 < \infty$$

**1301.** Az egyenlet mindkét oldalát kétszer differenciáljuk:

$$u'(x) + 4 \int_0^x u(t)\, dt = 1 \quad \text{és} \quad u''(x) + 4\, u(x) = 0.$$

Ez utóbbi differenciálegyenlet általános integrálja:

$$u(x) = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Az eredeti integrálegyenletből kiolvasható, hogy $u(0) = 0$, az egyszeri differenciálással nyert egyenletből $u'(0) = 1$ adódik, így

$$u(x) = \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Hogy ez valóban megoldás, arról közvetlenül behelyettesítéssel győződhetünk meg.

1302. A mag:

$$1 + 4y + \frac{3}{2} y^2 - (4 + 3y) x + \frac{3}{2} x^2 = 1 + 4 (y - x) + \frac{3}{2} (y - x)^2,$$

tehát

$$\int_0^x \left[1 + 4(y - x) + \frac{3}{2} (y - x)^2\right] \varphi(y)\, dy = x^3.$$

Mindkét oldalt háromszor differenciálva:

$$\varphi(x) - \int_0^x [4 + 3(y - x)]\, \varphi(y)\, dy = 3x^2; \quad \varphi'(x) - 4\, \varphi(x) + 3 \int_0^x \varphi(y)\, dy = 6x;$$

$$\varphi''(x) - 4\, \varphi'(x) + 3\, \varphi(x) = 6.$$

A most kapott differenciálegyenlet általános integrálja:

$$\varphi(x) = 2 + A\, e^{3x} + B\, e^x.$$

A megadandó egyenlet egyszeri és kétszeri differenciálásából adódó egyenletek alapján

$$\varphi(0) = 0; \quad \varphi'(0) - 4\varphi(0) = 0,$$

amiből

$$\varphi'(0) = 0$$

következik. Ezeknek megfelelő megoldás

$$\varphi(x) = 2 + e^{3x} - 3e^x.$$

Ez valóban kielégíti az egyenletet.

1303. Az egyenlet mindkét oldalát háromszor differenciálva, az alábbiakat kapjuk:

$$9x^2\, \varphi(x) - \int_0^x [9y - 4(y - x]\, \varphi(y)\, dy = \frac{16}{3} x^3,$$

$$9x^2\, \varphi' + 9x\, \varphi(x) - 4 \int_0^x \varphi(y)\, dy = 16\, x^2$$

$$9\, x^2\, \varphi''(x) + 27\, x\, \varphi'(x) + 5\varphi(x) = 32\, x.$$

Ez utóbbi EULER-típusú differenciálegyenlet, melynek általános integrálját a közismert módon meghatározva:

$$\varphi(x) = x + A\, x^{-\frac{1}{3}} + B\, x^{-\frac{5}{3}}.$$

Mivel az $x = 0$ pontban korlátos megoldást keresünk, azért $A = B = 0$, így tehát

$$\varphi(x) = x.$$

Ez tényleg kielégíti az egyenletet, mint arról behelyettesítéssel győződhetünk meg.

1304.

$$\varphi(x) = -\frac{\lambda}{2}\int_0^1 \left[\,|x-y| - \frac{1}{2}\right]\varphi(y)\,dy = -\frac{\lambda}{2}\int_0^x \left(x - y - \frac{1}{2}\right)\varphi(y)\,dy +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_1^x \left(y - x - \frac{1}{2}\right)\varphi(y)\,dy$$

egyenletből

$$\varphi'(x) = -\frac{\lambda}{2}\int_0^x \varphi(y)\,dy - \frac{\lambda}{2}\int_1^x \varphi(y)\,dy$$

és

$$\varphi''(x) = -\lambda\,\varphi(x). \qquad (*)$$

Másrészt

$$\varphi(0) = -\frac{\lambda}{2}\int_0^1 \left(y - \frac{1}{2}\right)\varphi(y)\,dy \quad \text{és} \quad \varphi(1) = -\frac{\lambda}{2}\int_0^1 \left(1 - y - \frac{1}{2}\right)\varphi(y)\,dy =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \left(y - \frac{1}{2}\right)\varphi(y)\,dy,$$

vagyis

$$\varphi(0) = -\varphi(1). \qquad ({}^{*}_{*})$$

Másrészt

$$\varphi'(0) = \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \varphi(y)\,dy \quad \text{és} \quad \varphi'(1) = -\frac{\lambda}{2}\int_0^1 \varphi(y)\,dy,$$

így

$$\varphi'(0) = -\varphi'(1). \qquad ({}^{*}_{*}{*})$$

A szóban forgó homogén integrálegyenlet megoldásai (*) azon integráljai, melyek $({}^{*}_{*})$ és $({}^{*}_{*}{*})$ feltételeknek eleget tesznek. (*) általános integrálja

$$\varphi(x) = \alpha\cos\sqrt{\lambda}\,x + \beta\sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

A peremfeltételek alapján

$$\varphi(1) = \alpha\cos\sqrt{\lambda} + \beta\sin\sqrt{\lambda} = -\alpha = -\varphi(0)$$

$$\varphi'(1) = \beta\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} - \alpha\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} = -\beta\sqrt{\lambda} = -\varphi'(0).$$

Ebből az egyenletrendszerből

$$\cos \sqrt{\lambda} = -1$$

azaz

$$\lambda = \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2 \pi^2, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

a hozzá tartozó sajátfüggvény

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{(2n+1)\,\pi}} \left[\cos \frac{2k+1}{2} \pi\, x + \sin \frac{2k+1}{2} \pi\, x\right].$$

1305. Legyen

$$L[\varphi] \equiv \frac{1}{4} \varphi'' + (a^2 - 4k^2 \cos 2x)\, \varphi = 0.$$

E differenciálegyenlet periodikus megoldásai a MATHIEU-függvények, FOURIER-sorai a következő alakúak:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \cos 2n\, x; \qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{2n} \sin 2n\, x;$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cos (2n+1)\, x; \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1} \sin (2n+1)\, x.$$

Ezek közül mindegyik egy meghatározott $a = a(k)$ számértékhez tartozik. Ha két MATHIEU-függvény ugyanahhoz az $a(k)$ számhoz tartozik, akkor az egyik páros, a másik páratlan függvény. Tudjuk azt is, hogy e függvények a $(-\pi, +\pi)$ számközben egy teljes ortogonális függvényrendszert alkotnak. Legyen $\varphi = \varphi(x)$ egy MATHIEU-féle függvény, és legyen továbbá

$$z(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{4\sqrt{2}k \sin x \sin t} \varphi(t)\, dt.$$

Az $L[z]$ kiszámítása miatt képezzük a mag második parciális differenciálhányadosát $x$ szerint:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{4\sqrt{2}k \sin x \sin y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{4\sqrt{2} \sin x \sin y} + 32\, k^2 (\sin^2 y - \sin x)\, e^{4\sqrt{2} \sin x \sin y}.$$

Ennek alapján elemi számolással belátható, hogy

$$L[z(x)] = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{4\sqrt{2}k \sin x \sin y} L[\varphi(y)]\, dy = 0.$$

$z(x)$ periodicitása miatt $z(x)$ ismét egy MATHIEU-féle függvény, mely ugyanahhoz az $a = a(k)$ paraméterértékhez tartozik, mint $\varphi(x)$. Azonban $\varphi(x)$ és $z(x)$ egyszerre páros és páratlan, éppen ezért $\varphi$ és $z$ egy konstans szorzótól eltekintve azonosak, vagyis a homogén integrálegyenlet fennállását igazoltuk. Azt kaptuk tehát, hogy a

$$K(x, y) = e^{4\sqrt{2}k \sin x \sin y}$$

mag sajátfüggvényei a MATHIEU-féle függvények. Mivel ezek egy teljes rendszert alkotnak, megkaptuk a mag összes sajátfüggvényét.

1306. A

$$\int_0^\pi \sin|x-y|\,dy = \int_0^x \sin(x-y)\,dy - \int_\pi^x \sin(y-x)\,dy = 2$$

azonosság azt mutatja, hogy $\lambda = \frac{1}{2}$ a mag sajátértéke, és ha $\lambda = \frac{1}{2}$, akkor $\varphi(x) \equiv C$ (const) az integrálegyenlet megoldását szolgáltatja.

$$\varphi'(x) = \lambda \int_0^x \cos(x-y)\,\varphi(y)\,dy - \lambda \int_0^\pi \cos(y-x)\,\varphi(y)\,dy.$$

$$\varphi''(x) = 2(\lambda - 1)\,\varphi(x); \qquad \varphi'(0) = \varphi'(\pi).$$

Ha $\lambda \neq \frac{1}{2}$, akkor az integrálegyenletből nyert differenciálegyenlet általános megoldása

$$\varphi(x) = \alpha \cos\sqrt{1-2\lambda}\,x + \beta \sin\sqrt{1-2\lambda}\,x.$$

A peremfeltételek figyelembevételével az adódik, hogy $\cos\sqrt{1-2\lambda}\,\pi = 1$, azaz $\lambda_n = \frac{1-4n^2}{2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ezek a mag sajátértékei. A homogén egyenlet összes megoldása: $\varphi_0 = c_0$, $\varphi_n(x) = \alpha \sin 2n\,x$ és $\varphi_{-n}(x) = \beta \cos 2n\,x$. $(n = 1, 2, \ldots)$

1307. Ha $\Phi(x, y) = \int_x^y K(t, y)\,dt = \int_x^y K(x, t)\,dt$,

akkor

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = K(x, y),$$

tehát

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0,$$

amiből

$$\Phi(x, y) = \Phi(x - y)$$

következik, de akkor ugyanez érvényes $K(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$-ra is.

1308. Legyen

$$\Phi(x, y) = \int_x^y K(t, y)\,dt = -\int_x^y K(x, t)\,dt,$$

ebből

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -K(x, y) \quad \text{és} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -K(x, y),$$

vagyis

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0,$$

azaz

$$\Phi(x, y) = \Phi(x + y).$$

Másrészt

$$\Phi(x, x) \equiv 0 = \Phi(2x),$$

amiből az állítás evidens.

1309. Írjuk egyenletünket

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x - y)\,\varphi(y)\,dy - \frac{1}{2}\int_1^x (y - x)\,\varphi(y)\,dy + x$$

alakba. Kétszer differenciáljunk:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \varphi(y)\,dy + \frac{1}{2}\int_1^x \varphi(y) + 1; \quad \varphi''(x) = \varphi(x).$$

Ez utóbbi differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\varphi(x) = a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x. \quad \text{De} \quad \varphi(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 y\,\varphi(y)\,dy$$

és

$$\varphi(1) = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - y)\,\varphi(y)\,dy + 1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(y)\,dy - \frac{1}{2}\int_0^1 y\,\varphi(y)\,dy + 1 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(y)\,dy - \varphi(0) + 1.$$

Másrészt

$$\varphi'(0) = -\frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(y)\,dy + 1; \quad \varphi'(1) = \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(y)\,dy,$$

így azt kapjuk, hogy

$$\varphi(0) + \varphi(1) + \varphi'(0) = 1; \quad \varphi'(0) + \varphi'(1) = 0,$$

vagyis

$$(1 + \operatorname{ch} 1)\,a + (1 + \operatorname{sh} 1)\,b = 1; \quad \operatorname{sh} 1 \cdot a + (1 + \operatorname{ch} 1)\,b = 0.$$

Ebből

$$a = \frac{1 + \operatorname{ch} 1}{2(1 + \operatorname{ch} 1) - \operatorname{sh} 1}; \quad b = \frac{-\operatorname{sh} 1}{2(1 + \operatorname{ch} 1) - \operatorname{sh} 1},$$

azaz

$$\varphi(x) = \frac{(1 + \operatorname{ch} 1)\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} 1 \operatorname{sh} x}{2(1 + \operatorname{ch} 1) - \operatorname{sh} 1}.$$

1310. Legyen

$$\varphi_1(x) = \int_x^\infty \varphi(y)\, dy; \quad \varphi_2(y) = \int_x^\infty \varphi_1(y)\, dy; \quad \ldots$$

A szóban forgó integrálegyenlet ekvivalens a

$$\frac{d^a \varphi_a}{dx^a} = (-1)^a \lambda\, \varphi_a(x)$$

differenciálegyenlettel. Ennek megoldása az exponenciális függvény.

1401.

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 1 - \frac{x^2}{2\,!}, \quad u_3 = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!}.$$

Teljes indukcióval kimutatható, hogy

$$u_n = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} \mp \ldots \pm \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}.$$

Integrálegyenletünk megoldása tehát

$$u(x) = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} \pm \ldots = \cos x.$$

1402. $$\varphi(x) = \operatorname{ch} x$$

1403. $\varphi_1(x) = x^2; \quad \varphi_2(x) = x^2 - \frac{1}{4}x; \quad \varphi_3(x) = x^2 - x\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot 4}\right); \ldots$

$$\varphi_n(x) = x^2 - \frac{x}{4}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \mp \ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{3^{n-2}}\right)$$

$$\varphi(x) = x^2 - \frac{3}{16}x.$$

1404. $K(x, y) = \boldsymbol{a}(x)\boldsymbol{b}(y)$, és $|\lambda|$ tegyen eleget az (1.4.3) feltételnek.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \boldsymbol{a}(x) \cdot \int_a^\beta \boldsymbol{b}(y)\, \varphi(y)\, dy$$

$$\varphi_1(x) = f(x)$$

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \boldsymbol{a}(x) \cdot \int_a^\beta \boldsymbol{b}(y)\, f(y)\, dy$$

$$\varphi_3(x) = f(x) + \lambda \boldsymbol{a}(x) \cdot \int_a^\beta \boldsymbol{b}(y)\, f(y)\, dy + \lambda^2\, \boldsymbol{a}(x) \cdot \int_a^\beta \int_a^\beta \boldsymbol{b}(y) \cdot \boldsymbol{b}(z)\, f(z)\, dy\, dz$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Látható, hogy a megoldás

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda a(x)\, \mathbf{c}(\lambda)$$

alakú, ahol a $\mathbf{c}(\lambda)$ vektor a $\lambda$ hatványsora.

**1405.**

$$u_0 \equiv 1, \quad u_1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(1-x)^2; \quad u_2 = \frac{11}{32} + \frac{9}{16}(1-x)^2 + \frac{3}{32}(1-x)^4, \ldots$$

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{3}\,(1-x)}{\operatorname{ch}\sqrt{3}}.$$

Hogy milyen fokú az approximáció, arra nézve felvilágosítást nyújt az alábbi táblázat:

| $x_n$ | $u_1(x_n)$ | $u_2(x_n)$ | $\varphi(x_n)$ | $u_2(x_n) - \varphi(x_n)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{13}{16} = 0{,}8125$ | $\frac{419}{512} \approx 0{,}8183$ | 0,8071 | 0,0112 |
| $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{1}{2} = 0{,}5$ | $\frac{12}{22} \approx 0{,}5417$ | 0,5294 | 0,0123 |
| $1-\frac{\sqrt{3}}{6}$ | $\frac{5}{16} = 0{,}3125$ | $\frac{601}{1536} \approx 0{,}3913$ | 0,3869 | 0,0044 |
| 1 | $\frac{1}{4} = 0{,}25$ | $\frac{11}{32} = 0{,}3438$ | 0,3431 | 0,0007 |

A maximális ordinátára vonatkoztatva, a hiba kisebb, mint 1,3%.

**1406.** Az egyenlet mindkét oldalának differenciálása után nyerjük a

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{1}{K(x,x)} \cdot \frac{\partial K}{\partial x}\, \varphi(y)\, dy = \frac{f'(x)}{K(x,x)} \qquad (*)$$

másodfajú VOLTERRA-típusú egyenletet, melynek magja és zavaró függvénye korlátos, ez utóbbinak van tehát egy és csakis egy megoldása. Másrészt a (*) alatti egyenletet $K(x, x)$-szel végigszorozva, és mindkét oldalt integrálva, a

$$\int_0^x K(x,y)\, \varphi(y)\, dy = f(x) + C$$

egyenletre jutunk. Itt $C = 0$ a 4° miatt.

**1407.** Alkalmazzuk az **1407.** feladat megoldási módszerét, differenciáljuk az egyenletet:

$$\varphi(x) - \int_0^x \sin(x-y)\, \varphi(y)\, dy = x \qquad (^*_*)$$

Ez megoldható a szukcesszív approximáció módszerével is, de célszerűbb a következő módon eljárni: újra differenciáljuk az egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$\varphi'(x) - \int_0^x \cos(x-y)\,\varphi(y)\,dy = 1.$$

Ám az eredeti egyenletből a bal oldal második tagja $-\frac{x^2}{2}$, ezért

$$\varphi'(x) = \frac{x^2}{2} + 1,$$

azaz

$$\varphi(x) = \frac{x^3}{6} + x + C.$$

(*) egyenlet alapján $\varphi(0) = 0$, ezért $C = 0$. $\varphi(x) = \frac{x^3}{6} + x$ valóban kielégíti egyenletünket.

**1501.**

$$K(p) = \frac{a_{01}}{p-\alpha_1} + \frac{a_{11}}{(p-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{a_{n_1 1}}{(p-\alpha_1)^{n_1+1}} + \dots + \frac{a_{0k}}{p-\alpha_k} + \dots + \frac{a_{n_k k}}{(p-\alpha_k)^{n_k+1}}.$$

Ebből

$$\frac{k(p)}{1-k(p)} = \frac{b_{01}}{p-\beta_1} + \dots + \frac{b_{n_1 1}}{(p-\beta_1)^{n_1+1}} + \dots + \frac{b_{0l}}{p-\alpha_l} + \dots + \frac{b_{n_l l}}{(p-\alpha_l)^{n_l+1}}$$

alakú (a $b_{ik}$ együtthatók könnyen meghatározhatók). Ennélfogva

$$\varphi(x) = \left(b_{01} + \frac{b_{11}}{1!}x + \dots + \frac{b_{n_1 1}}{n_1!}x^{n_1}\right)e^{\beta_1 x} + \dots + \left(b_{01} + \dots + \frac{b_{n_l l}}{n_l!}x^{n_l}\right)e^{\beta_l x}.$$

**1502.**

$$k(t) = t\,e^{4t},\quad K(p) = \frac{1}{(p-4)^2},\quad \frac{K(p)}{1-2K(p)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p-6} - \frac{1}{p-2}\right)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}(e^{6x} - e^{2x}).$$

**1503.**

$$K(p) = \frac{1}{2\sqrt{1+p^2}},\quad \frac{K(p)}{1-K(p)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2}\right)}{p^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\int_0^x \sin\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)\,\frac{J_1(y)}{y}\,dy + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right].$$

**1504.**

$$K(p) = \frac{\lambda}{\sqrt{p}}; \quad \frac{K(p)}{1 - K(p)} = \frac{\lambda}{\sqrt{p - \lambda}},$$

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi x}} + \lambda^2 e^{\lambda^2 x} \left(1 + \Theta(\lambda \sqrt{x})\right),$$

ahol

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

**1505.** Ha $x = e^{\xi}$; $t = e^{\tau}$; $\varphi(e^{\tau})\, e^{\frac{\tau}{2}} = \psi(\tau)$; $f(e^{\xi})\, e^{\frac{\xi}{2}} = F(\xi)$, akkor egyenletünk a

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\tau)}{\operatorname{ch} \frac{\xi - \tau}{2}}\, d\tau = F(\xi)$$

egyenletbe megy át. Mindkét oldal FOURIER-transzformáltját vesszük, és alkalmazzuk a konvolúció-tételt. Ehhez szükséges a magfüggvény FOURIER-transzformáltjának meghatározása:

$$\varkappa(u) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iuv}}{\operatorname{ch} \frac{v}{2}}\, dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iuv + \frac{v}{2}}}{1 + e^{v}}\, dv.$$

Ez utóbbi integrál reziduum-tétel segítségével számítható ki. Integráljunk olyan zárt út mentén, mely a valós tengely egy szakaszából és egy, az $\operatorname{Im} z > 0$ félsíkban futó $z = 0$ középpontú körből áll, és a kör sugarát növeljük minden határon túl. Azt kapjuk, hogy

$$\varkappa(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{1}{\operatorname{ch} u \pi}.$$

Másrészt

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)\, e^{iu\xi}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{iux + \frac{x}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s^{-\frac{1}{2} + iu} f(s)\, ds.$$

Tehát

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u) \operatorname{ch} \pi u\, e^{-iut}\, du,$$

feltéve azt, hogy $\Phi(u) \operatorname{ch} \pi u \in L^2(-\infty, +\infty)$.

1506. Az $x = \varrho s$, $\xi = \varrho t$, $\frac{h}{\varrho} = \eta$, $g(\xi) = y(t)$ jelöléssel egyenletünk a következő módon írható át:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{(s-t)^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{(s-t)^2+4\eta^2}} \right] y(t)\, dt = F(s).$$

A mag FOURIER-transzformáltja:

$$\varkappa(u) = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, [H_0^{(1)}(i\,u) + H_0^{(1)}(2i\,\eta\, u)].$$

Az egyenlet megoldásának további menete megegyezik az előbbi feladatéval.

1507. Szorozzuk végig az egyenletet $e^{inx}$-nel és integráljunk.

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}\, \varphi(x)\, dx = \varphi_n, \quad \int_0^{\pi} e^{inx}\, K(x)\, dx = k_n, \quad \int_0^{2\pi} e^{inx} f(x)\, dx = f_n$$

jelöléseket bevezetve, az adódik, hogy

$$\varphi_n - \lambda\, k_n\, \varphi_n = f_n, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (*)$$

mert

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} \int_0^{2\pi} K(x-y)\, \varphi(y)\, dy\, dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in(y+t)}\, K(t)\, \varphi(y)\, dy\, dt = k_n\, \varphi_n.$$

(*) alatti egyenletből

$$\varphi_n = \frac{f_n}{1 - \lambda\, k_n}.$$

Annak szükséges feltétele, hogy megoldás létezzék, az, hogy $\lambda \neq \frac{1}{k_n}$. A megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele ez esetben az, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^2}{(1-\lambda\, k_n)^2} < \infty.$$

1508. Parciális integrálással

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}\, \varphi'(x)\, dx = [e^{inx}\, \varphi(x)]_0^{2\pi} - i\,n \int_0^{2\pi} e^{inx}\, \varphi(x)\, dx = c - i\,n\, \varphi_n.$$

Az egyenlet mindkét oldalát $e^{inx}$-nel szorozva és integrálva, az adódik, hogy

$$c - i\,n\, \varphi_n - \lambda\, k_n\, \varphi_n = f_n,$$

ebből

$$\varphi_n = \frac{c - f_n}{i\,n - \lambda\, k_n}.$$

A megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c - f_n)^2}{(i\,n - \lambda\, k_n)^2} < \infty.$$

1509. $K(t) \equiv 0$ a feltételeknek megfelel. Ha $K \not\equiv 0$, akkor szorozzuk végig az egyenletet $e^{int}$-nel, és integráljunk 0-tól $2\pi$-ig:

$$k_n^2 = k_n.$$

De akkor kell lennie olyan $n$-nek, melyre $k_n \neq 0$, ezekre az $n$ számokra

$$k_n = 1.$$

Ez azt jelenti, hogy csupán véges sok $n$ indexhez tartozó FOURIER-együttható 0-tól különböző, és ezek mind egyenlőek egymással. Ebből adódik, hogy

$$K(t) = e^{in_1 t} + e^{in_2 t} + \ldots + e^{in_k t}$$

alakú, ahol $n_1, n_2, \ldots, n_k$ egészek.

1510. Az egyenlet mindkét oldalát $e^{2inx}$-nel végigszorozva, és integrálva 0-tól $\pi$-ig, adódik (figyelembe véve, hogy $|\sin x|$ páros függvény!):

$$\frac{4n}{4n^2 - 1}\, \varphi_n = 0, \qquad \text{ha} \qquad n \neq 0$$

és

$$2\varphi_0 = 1, \qquad \text{azaz} \qquad \varphi_0 = \frac{1}{2},$$

tehát $\varphi(y) = 1$.

1511. A $\varphi$ LAPLACE-transzformáltja $\Phi(p) = \dfrac{G(p)}{1 - \lambda\, K(p)}$.

$$\psi(x) - \lambda \int_0^x k(x - t)\, \psi(t)\, dt = g^{(n)}(x)$$

egyenlet mindkét oldalának LAPLACE-transzformáltja:

$$\Psi(p) - \lambda\, K(p)\, \Psi(p) = p^n\, G(p),$$

amiből

$$\Psi(p) = p^n \frac{G(p)}{1 - \lambda\, K(p)} = p^n\, \Phi(p).$$

1512. Írjuk egyenletünket a következő alakba:

$$f(x) = \lambda \int_0^x e^{-(x-t)}\, f(t)\, dt + \lambda\, e^x \int_x^{\infty} e^{-u} f(u)\, du.$$

Ha $\mathfrak{L}\{f\} = F(p)$, akkor

$$\mathfrak{L}\left\{ \int_0^x e^{-(x-t)} f(t)\, dt \right\} = \frac{F(p)}{p + 1},$$

másrészt

$$\mathfrak{L}\left\{\int_x^\infty e^{-t} f(t)\,dt\right\} = \mathfrak{L}\left\{\int_x^\infty e^{-t}\, t f(t)\,\frac{dt}{t}\right\} = -\frac{1}{p}\int_0^p F'(\zeta+1)\,d\zeta,$$

mert

$$\mathfrak{L}\{e^{-t} f(t)\, t\} = -F'(p+1).$$

Végül

$$\mathfrak{L}\left\{e^x \int_x^\infty e^{-t} f(t)\,dt\right\} = -\frac{1}{p-1}\int_0^{p-1} F'(\zeta+1)\,d\zeta = \frac{-1}{p-1}\,[F(p)-F(1)].$$

Ennélfogva egyenletünk transzformált egyenlete a következő:

$$F(p) = \lambda\,\frac{F(p)}{p+1} - \frac{\lambda}{p-1}\,[F(p)-F(1)],$$

ebből

$$F(p) = \frac{F(1)}{2}\left[\frac{1}{p+\sqrt{1-2\lambda}} + \frac{1}{p-\sqrt{1-2\lambda}}\right]\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Vissztranszformálással azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{\lambda F(1)}{2\sqrt{1-2\lambda}}\left[(1+\sqrt{1-2\lambda})\,e^{\sqrt{1-2\lambda}\,x} - (1-\sqrt{1-2\lambda})\,e^{-\sqrt{1-2\lambda}\,x}\right].$$

A szögletes zárójel előtt álló tényező bármilyen szám lehet (az egyenlet homogén !); ahhoz, hogy az itt fellépő integrálok konvergensek legyenek, elégséges, ha

$$|\,\mathrm{Re}\,(\sqrt{1-2\lambda})\,| < 1.$$

**1513.** A konvolúciótétel és (1.5.1) alapján az állítás evidens az egyenletes konvergencia miatt.

**1514.**

$$\mathfrak{L}\{K(x,y)\} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n\,!)^2}\,y^n\,\frac{1}{p^2+1}\,\frac{n!}{p^{n+1}} = \frac{1}{p(p^2+1)}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n\,!}\,y^n\,\frac{1}{p^n} =$$

$$= \frac{1}{p(p^2+1)}\,e^{-\frac{y}{p}}.$$

Képezzük egyenletünk minden tagjának LAPLACE-transzformáltját, és alkalmazzuk az EFROSZ-féle tételt (legyen $\mathfrak{L}\{\varphi\} = \Phi$):

$$p\,\Phi(p) + \frac{1}{p(p^2+1)}\,\Phi\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p-1}. \qquad (*)$$

Helyettesítsünk ide $p$ helyébe $1/p$-t:

$$\frac{1}{p}\,\Phi\left(\frac{1}{p}\right) + \frac{p^3}{1+p^2}\,\Phi(p) = \frac{p}{1-p}. \qquad (^*_*)$$

(*) és ($\overset{*}{*}$) egyenletekből küszöböljük ki $\varphi\left(\frac{1}{p}\right)$-t:

$$\frac{p(p^2+1)-p^3}{(p^2+1)^2}\,\Phi(p)=\frac{1}{p-1}\left(1+\frac{p}{p^2+1}\right),$$

azaz

$$\Phi(p)=\frac{(p^2+1)^2}{p(p-1)(p^2+p+1)(p^2-p+1)}\left(1+\frac{p}{p^2+1}\right).$$

A megoldás:

$$\varphi(x)=-1+2e^t-\frac{5}{6}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{5}{6\sqrt{3}}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

**1515.** Ha $\mathfrak{L}\{f\}=F(p)$; $\mathfrak{L}\{g\}=G(p)$, alkalmazzuk az egyenlet mindkét oldalára a LAPLACE-transzformációt; az EFROSZ-képlet értelmében

$$\frac{1}{\sqrt{p}}F\left(\frac{1}{p}\right)=G(p).$$

Ide $p$ helyébe $\frac{1}{p}$-t helyettesítsünk:

$$\sqrt{p}\,F(p)=G\left(\frac{1}{p}\right),\quad \text{ebből}\quad F(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}G\left(\frac{1}{p}\right).$$

Erre ismét alkalmazva az EFROSZ-tételt, az adódik, hogy

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{\cos 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}}\,g(y)\,dy.$$

**1516.** A módszer ugyanaz, mint az **1515.** feladat megoldásánál. A megoldás

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{\sin 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}}\,g(x)\,dx.$$

**1517.** Írjuk át egyenletünket

$$\int_0^\infty\frac{\sin^2 xt}{\sqrt{x}}\,f(t)\,dt=\sqrt{x}\,e^{-x}=g(x)$$

alakba. Legyen továbbá $\varphi'(t)=f(t)$ és $\varphi(0)=0$. Egyenletünk mindkét oldalának $x$ szerinti LAPLACE-transzformáltját képezve, az adódik, hogy

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\int_0^\infty\left(1-e^{-\frac{t}{r}}\right)\varphi'(t)\,dt=G(p),$$

ahol $\mathfrak{L}(g) = G(p)$. Ide helyettesítsünk $p$ helyébe $\frac{1}{p}$-t, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi p}\int_0^\infty \varphi'(t)\,dt - \frac{1}{2}\sqrt{\pi p}\int_0^\infty e^{-pt}\varphi'(t)\,dt = G\left(\frac{1}{p}\right).$$

Ebből

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi p}\,\lambda - \frac{1}{2}\sqrt{\pi p}\,p\,\Phi(p) = G\left(\frac{1}{p}\right); \quad \Phi(p) = \frac{\lambda}{p} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}p^{-\frac{3}{2}}G\left(\frac{1}{p}\right),$$

ahol $\lambda = \varphi(\infty)$. Az **1516.** feladat állítását figyelembe véve

$$\varphi(x) = \lambda - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 2\sqrt{xt}}{\sqrt{t}}\,g(t)\,dt = \lambda - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 2\sqrt{xt}}{\sqrt{t}}\sqrt{t}\,e^{-t}\,dt = \lambda - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}\,e^{-x}.$$

$[\varphi(\infty) = \lambda$ valóban teljesül$]$. Így tehát

$$f(x) = \varphi'(x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(-\sqrt{x}\,e^{-x} + \frac{1}{2}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right).$$

**1518.** Tegyük fel azt, hogy $\mathfrak{L}^{-1}\{g\} = \gamma(y)$, alkalmazzuk egyenletünk mindkét oldalára az inverz LAPLACE-transzformációt:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos yx\,f(x)\,dx = \gamma(y).$$

A FOURIER-transzformáció megfordítási képlete alapján

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos xy\,\gamma(y)\,dy.$$

**1519.** A megoldás módszere megegyezik az előző feladat megoldási módszerével:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin xy\,\gamma(y)\,dy \quad (\mathfrak{L}^{-1}\{g\} = \gamma).$$

**1520.** Ha $\mathfrak{L}^{-1}\{f\} = \varphi$, és $\mathfrak{L}^{-1}\{g\} = \gamma$, akkor a kitűzött integrálegyenlet az alábbi egyenlet LAPLACE-transzformáltja:

$$\int_0^\infty k(t)\,e^{-zt}\,dt \cdot \varphi(z) = \gamma(z).$$

$\varphi(z)$ együtthatója $k(t)$ LAPLACE-transzformáltja, ez legyen $K(z)$:

$$\varphi(z) = \frac{\gamma(z)}{K(z)}, \quad f(t) = \mathfrak{L}\left\{\frac{\gamma(z)}{K(z)}\right\},$$

feltéve, hogy ez utóbbi létezik.

**1521.** A szóban forgó egyenlet a

$$\frac{z^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-zx} f(x)\, dx = \frac{z^{m-1}}{\Gamma(m)}$$

egyenlet LAPLACE-transzformáltja. Így tehát

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-zx} f(x)\, dx = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(m)} z^{m-n},$$

ebből

$$f(x) = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n-m)} x^{m-n-1}.$$

**1522.** Az adott egyenlet a

$$\psi(z) - \lambda\, \psi(z) \int_a^b K(t)\, e^{-z\varphi(t)}\, dt = \Phi(z)$$

egyenlet LAPLACE-transzformáltja, ahol $\mathfrak{L}\{\psi\} = \varphi$, és $\mathfrak{L}\{\Phi\} = f$. Így tehát

$$\psi(z) = \frac{\Phi(z)}{1 - \lambda \int_a^b K(t)\, e^{-z\varphi(t)}\, dt},$$

az egyenlet megoldása

$$\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-xz} \frac{\varphi(z)}{1 - \lambda \int_a^b K(t)\, e^{-z\Psi(t)}\, dt}\, dz,$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló integrál létezik.

**1523.** A szóban forgó egyenlet a

$$\chi(z) - \lambda\, \chi(z) \int^b K(t)\, e^{-z\mu(t)}\, dt = (-1)^n z^n \Phi(z)$$

egyenlet LAPLACE-transzformáltja. Így

$$\chi(z) = (-1)^n z^n \frac{\Phi(z)}{1 - \lambda \int_a^b K(t)\, e^{-z\mu(t)}\, dt} = (-1)^n z^n \psi(z)$$

(l. **1522.** megoldását); ebből az állítás evidens.

**1601.** Az állítás nyilvánvaló abból, hogy a mondott körülmények mellett az integrálások sorrendje felcserélhető.

**1602.** Az (1.6.7) képlet alapján az állítás magától értetődik, mert $K$ és $K^*$-nak FREDHOLM-determinánsa ugyanaz.

**1603.** A

$$\varphi = \lambda\, \mathcal{K}\, \varphi$$

egyenletet szorozzuk meg $\psi$-vel, a $\psi = \mu\, \mathcal{K}^*\, \psi$ integrálegyenlet nem azonosan eltűnő megoldásával, és integráljunk:

$$(\varphi, \psi) = \lambda\, (\psi, \mathcal{K}\, \varphi) = \lambda(\mathcal{K}^*\, \psi,\ \varphi) = \frac{\lambda}{\mu}\, (\varphi, \psi).$$

Ha $\lambda \neq \mu$, akkor $(\varphi, \psi) = 0$.

**1604.** Ha $\lambda$ nem sajátérték, akkor

$$\varphi = (\mathcal{E} + \lambda\, \mathcal{R}_\lambda)\, K(P, Q).$$

Ezt visszahelyettesítve az integrálegyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{R}_\lambda - \lambda\, \mathcal{K}\, \mathcal{R}_\lambda = \mathcal{K},$$

ami a bizonyítandó állítás.

**1605.** Legyen $|\,K(x, y)\,| \leqq M$, az iteráltak

$$K_2(x, y) = \int_x^y K(x, t)\, K(t, y)\, dt; \quad K_3(x, y) = \int_x^y K(x, t)\, K_2(t, y)\, dt; \ \ldots .$$

Ebből adódik, hogy a VOLTERRA-mag nyomai:

$$A_2 = A_3 = \ldots = A_n = \ldots = 0.$$

(1.6.7) szerint a FREDHOLM-féle determináns:

$$D(\lambda) = e^{-\lambda A_1},$$

vagyis a $D(\lambda) = 0$ egyenletnek nincsen véges megoldása.

**1606.** A $K$ mag iteráltjai:

$$K_2(x, y) = \varphi_1(x)\, \varphi_3(y) + \varphi_2(x)\, \varphi_4(y) + \ldots + \varphi_{n-2}(x)\, \varphi_n(y),$$
$$K_3(x, y) = \varphi_1(x)\, \varphi_4(y) + \varphi_2(x)\, \varphi_5(y) + \ldots + \varphi_{n-3}(x)\, \varphi_n(y)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$K_{n-1}(x, y) = \varphi_1(x)\, \varphi_n(y)$$
$$K_n(x, y) = K_{n+1}(x, y) = \ldots = 0.$$

Ebből következik, hogy e mag nyomai

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = \ldots = 0$$

a FREDHOLM-féle determináns (1.6.7) alapján $D(\lambda) \equiv 1$, ennek pedig nincs gyöke.

**1607.** Legyen $K(x, y) = \boldsymbol{a}(x)\, \boldsymbol{b}(y)$, ennek iteráltjai

$$K_2(x, y) = \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{b}; \quad K_3(x, y) = \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{A}^2\, \boldsymbol{b}, \ldots, \quad K_n(x, y) = \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{A}^{n-1}\, \boldsymbol{b}, \ldots .$$

Elegendő kicsiny $|\lambda|$ mellett

$$R(x, y; \lambda) = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} + \lambda\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{b} + \lambda^2\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{A}^2\,\boldsymbol{b} + \ldots + \lambda^n\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{A}^n\,\boldsymbol{b} + \ldots =$$
$$\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{I} + \lambda\,\boldsymbol{A} + \lambda^2\,\boldsymbol{A}^2 + \ldots + \lambda^n\,\boldsymbol{A}^n + \ldots]\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{I} - \lambda\,\boldsymbol{A}]^{-1}\,\boldsymbol{b},$$

ez pedig megegyezik (1.2.10) képlettel.

**1608.** $K_1 * K_2 \equiv 0$ miatt $\mathcal{K}^n = \mathcal{K}_1^n + \mathcal{K}_2^n$, és a megfelelő nyomokra érvényes az

$$A^{(n)} = A_1^{(n)} + A_2^{(n)}$$

összefüggés. (1.6.7) alapján ebből az állítás evidens.

**1609.** Az állítás első fele 1608.-ból nyilvánvaló. Ami az állítás második részét illeti, alkalmazzuk a $\mathcal{K} = \mathcal{F} + \mathcal{G}$ integráloperátort a $\varphi_0$ sajátfüggvényre:

$$\mathcal{K}\,\varphi_0 = \mathcal{F}\,\varphi_0 + \mathcal{G}\,\varphi_0 = \frac{1}{\lambda_0}\,\varphi_0 + \mathcal{G}\varphi_0.$$

Ámde $\lambda\mathcal{F}\,\varphi_0 = \varphi_0$ egyenlet mindkét oldalára alkalmazva a $\mathcal{G}$ operátort, az adódik, hogy

$$0 \equiv \lambda_0\,\mathcal{G}\,\mathcal{F}\,\varphi_0 = \mathcal{G}\,\varphi_0,$$

az ortogonalitás miatt. Így tehát

$$\mathcal{K}\,\varphi_0 = \frac{1}{\lambda_0}\,\varphi_0.$$

**1610.** Nyilván

$$A_n * B_m = 0,$$

$A_n$ és $B_m$ az $A$ és $B$ iteráltjai. Legyenek $|\lambda|$ és $|\mu|$ olyan kicsinyek, hogy $R_A$-hoz és $R_B$-hez tartozó NEUMANN-féle sorok konvergensek, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n A_n * \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m B_m = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{n+m} A_n * B_m = 0.$$

Az analitikus folytatás elve alapján ez a reláció minden $\lambda$ és $\mu$ reguláris értékre érvényes.

**1611.** Ha $\lambda$ a $K_1, K_2, \ldots, K_n$ magok egyikének sem sajátértéke, akkor az 1608. feladat eredménye alapján $K$-nak sem sajátértéke, és fordítva. A $\mathcal{K} - \mathcal{K}_i$ operátort az

$$(\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{K}_i)\,\varphi_i = f \qquad (*)$$

egyenletre alkalmazva, a $K_i$ magok ortogonalitása miatt

$$(\mathcal{K} - \mathcal{K}_i)\,\varphi_i = (\mathcal{K} - \mathcal{K}_i)\,f.$$

Ezeket az egyenleteket összeadva, a

$$\mathcal{K}(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n) = \mathcal{K}_1\,\varphi_1 + \mathcal{K}_2\,\varphi_2 + \ldots + \mathcal{K}_n\,\varphi_n + (n-1)\,\mathcal{K}\,f$$

eredményt kapjuk. Ha a (*) alatti egyenleteket adjuk össze, az adódik, hogy

$$(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) - \lambda(\mathcal{K}_1\,\varphi_1 + \ldots + \mathcal{K}_n\,\varphi_n) = n\,f.$$

Ezt az előbbivel összevetve, azt kapjuk, hogy a megoldandó integrálegyenlet megoldása:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n - (n-1) f.$$

Miután $\lambda$ nem sajátérték, azért ez az egyetlen megoldás.

Ugyanilyen módszerrel határozható meg az inhomogén egyenlet megoldása akkor is, ha $\lambda$ a $\mathcal{K}$ mag sajátértéke. Ez esetben $\lambda$ legalább egy $\mathcal{K}_i$ magnak is sajátértéke (l. az **1608.** feladatot!). Legyen $\lambda$ a $K_1, K_2, \ldots, K_p$ sajátértéke. Akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a (*) egyenletek közül az első $p$ megoldható legyen, az, hogy $f$ ortogonális legyen $K_1^*, K_2^*, \ldots, K_p^*$ minden $\lambda$-hoz tartozó sajátfüggvényére. De a sajátfüggvények (és csak ezek) $K^*$-nak is sajátfüggvényei **1609.** feladat szerint, így tehát ez esetben az eredeti egyenletnek a megoldása is biztosítva van.

**1612.** 1°. Ha 1 az $A(x, y)$ magnak nem sajátértéke, akkor a

$$\varphi(x) - \int_a^b A(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x) + \lambda \int_a^b B(x, y)\, \varphi(y)\, dy$$

átírásból látható, hogy egyenletünk megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy $\lambda$ a

$$B(x, y) + \int_a^b R_A(x, t;\ 1)\, B(t, y)\, dt$$

magnak ne legyen sajátértéke ($R_A$ jelenti $A$ rezolvens magját).

2°. Ha az 1° alattit nem állíthatjuk, akkor egyenletünknek

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b B(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x) - \int_a^b A(x, y)\, \varphi(y)\, dy$$

alakban való felírásából leolvasható, hogy az egyértelmű megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele az, hogy $\lambda$-t úgy válasszuk meg, hogy az

$$A(x, y) + \lambda \int_a^b R_B(x, t;\ \lambda)\, A(t, y)\, dt$$

magnak 1 ne legyen sajátértéke.

**1613.** Rögzített $y$ mellett az

$$(\mathcal{E} - \lambda\, \mathcal{K})\, \varphi = \boldsymbol{a}(x)\, \boldsymbol{b}(y)$$

egyenlet megoldása

$$\varphi(x, y) = (\mathcal{E} + \lambda\, \mathcal{R}_\lambda)\, (a_1(x)\, b_1(y) + \ldots + a_n(x)\, b_n(y)) = c_1(x)\, b_1(y) + \ldots + c_n(x)\, b_n(y)$$

ahol

$$c_i(x) = (\mathcal{E} + \lambda\, \mathcal{R}_\lambda)\, a_i,$$

feltéve persze, hogy $\lambda$ a $\mathcal{K}$-nak nem sajátértéke.

**1614.** Egyenletünk értelmében

$$\int_\Omega K_{n-1}(P, T)\, K(T, Q)\, d\Omega_T = K(P, Q).$$

Rögzített $Q$ mellett $K(T, Q)$ a $K_{n-1}$ mag 1-hez tartozó sajátfüggvénye. $K_{n-1}$-nek 1-hez tartozó lineárisan független sajátfüggvényei legyenek $\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P)$. Akkor a mondottak alapján

$$K(P, Q) = c_1 \varphi_1(P) + \ldots + c_n \varphi_n(P),$$

ahol a $c_i$ együtthatók kizárólag $Q$-tól függenek.

**1416.** Az **1415.** feladat szerint

$$K(P, Q) = \sum_{i=1}^{n} a_i(P)\, b_i(Q)$$

és a szóban forgó függvényegyenlet alapján

$$K_2(P, Q) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, a_i(P)\, b_j(Q) = \sum_{i=1}^{n} a_i(P)\, b_i(Q) = K(P, Q).$$

De akkor

$$\alpha_{ij} = (a_i, b_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad i \neq j \\ 1, & \text{ha} \quad i = j, \end{cases}$$

vagyis $a_i$ és $b_i$ függvények egy biortogonális rendszert képeznek.

**1616.** Tegyük fel, hogy az első el nem tűnő együttható $a_p$, akkor írjuk egyenletünket a következő alakba:

$$K_p(P, Q) = \frac{1}{a_p} \int_{\Omega} [a_{p+1} K(P, T) + a_{p+2} K_2(P, T) + \ldots + a_n K_{n-p}(P, T)]\, K_p(T, Q)\, d\Omega_T.$$

Rögzített $Q$ mellett $K_p(P, Q)$ a jobb oldalon álló zárójelben levő mag $\frac{1}{a_p}$-hez tartozó sajátfüggvénye. Ebből, éppen úgy, mint **1614.** feladatnál, következik az állítás.

**1617.**

$$K_2(P, Q) = \int_{\Omega} K(P, T)\, K(T, Q)\, d\Omega_T = \int_{\Omega} K(T, P)\, K(Q, T)\, d\Omega_T = K_2(Q, T)$$

azaz $K_2$ szimmetrikus. Tovább teljes indukcióval következtetünk: feltéve, hogy

$$K_{n-1}(P, Q) = \pm K_{n-1}(Q, P),$$

akkor

$$K_n(P, Q) = \int_{\Omega} K_{n-1}(P, T)\, K(T, Q)\, d\Omega_T = \mp \int_{\Omega} K_{n-1}(T, P)\, K(Q, T)\, d\Omega_T = \mp K_n(Q, P)$$

**1618.** Legyen $\lambda$ a $K$ NEUMANN-sorának konvergenciakörén belül, akkor

$$R(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K_2(x, y) + \lambda^3 K_3(x, y) + \ldots,$$

$\lambda$ helyébe tegyünk rendre $\varepsilon\lambda, \varepsilon^2\lambda, \ldots, \varepsilon^{n-1}\lambda$ értéket, akkor az adódik, hogy

$$n\lambda^n [K_n(x, y) + \lambda^n K_{2n}(x, y) + \ldots + \lambda^{(p-1)n} K_{pn}(x, y) + \ldots] =$$
$$= \lambda [R(x, y; \lambda) + \varepsilon R(x, y; \varepsilon\lambda) + \ldots + \varepsilon^{n-1} R(x, y; \varepsilon^{n-1}\lambda)].$$

A bal oldalon álló végtelen sor $R^{(n)}(x, y;\ \lambda^n)$, ezzel az állítás be van bizonyítva. $R$ és $R^{(n)}$ analitikus volta miatt a bizonyítandó reláció nemcsak kis $|\lambda|$ értékre, hanem minden $\lambda$-ra igazolt, mely $R$-nek nem pólusa.

**1420.** Az állítás **1419.** feladat alapján evidens.

**1620.** Legyen $|\lambda|$ olyan kicsiny, hogy a NEUMANN-sor konvergens legyen, akkor

$$R(x, t;\ \lambda)\, R(t, y;\ \lambda) = K(x, t)\, K(t, y) +$$
$$+ \lambda\, K_2(x, t)\, K(t, y) + \lambda^2 K_3(x, t)\, K(t, y) + \dots$$
$$+ \lambda\, K(x, t)\, K_2(t, y) + \lambda^2 K_2(x, t) K_2(t, y) + \dots$$
$$+ \lambda^2 K(x, t)\, K_3(t, y) + \dots$$

integrálással

$$R_2(x, y;\ \lambda) = K_2(x, y) + 2\lambda\, K_3(x, y) + 3\lambda^2 K_4(x, y) + \dots .$$

Hasonló számolással nyerhető $R_3(x, y;\ \lambda)$, $R_4(x, y;\ \lambda)$, $\dots$. Ha $K$ korlátos, és $|K(x, y)| < M$, akkor $|\lambda + \mu| < \frac{1}{M}$ mellett

$$R(x, y;\ \lambda) + \mu\, R_2(x, y;\ \lambda) + \mu^2 R_3(x, y;\ \lambda) + \dots = R(x, y;\ \lambda + \mu).$$

Éppen ezt kellett bizonyítani.

**1621.** Az állítás közvetlenül következik **1620**-ból.

**1622.** Ismeretes, hogy bármely négyzetével integrálható magra

$$\frac{d \ln D(\lambda)}{d\lambda} = \int_a^b R(x, x;\ \lambda)\, d\lambda,$$

ebből

$$\frac{d^2 \ln D(\lambda)}{d\lambda^2} = \int_a^b \frac{\partial R(x, x;\ \lambda)}{\partial \lambda}\, dx = \int_a^b R_2(x, x;\ \lambda)\, d\lambda$$

az **1621.** feladat állítása szerint. Teljes indukcióval, **1621.** feladat felhasználásával adódik az állítás.

**1623.** Fejtsük $D(\lambda + \mu)$ függvényt TAYLOR-sorba a $\mu = 0$ környezetében (rögzített $\lambda$ mellett), és használjuk fel az **1622.** feladat állítását.

**1624.** Parciális törtre bontással

$$\frac{R(x, y;\ \lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{R(x, y;\ \lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} + \frac{R(x, y;\ \lambda_3)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} =$$
$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3}\left[\frac{R(x, y; \lambda_1) - R(x, y; \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{R(x, y; \lambda_1) - R(x, y;\ \lambda_3)}{\lambda_1 - \lambda_3}\right].$$

De a rezolvens mag ismert függvényegyenlete folytán (l. **1604.** és **1620.** feladatokat)

$$\frac{R(u, y;\ \lambda_2) - R(u, y; \lambda_3)}{\lambda_2 - \lambda_3} = \int_a^b R(u, v;\ \lambda_2)\, R(v, y;\ \lambda_3)\, dv.$$

Ezt $R(x, u; \lambda_1)$-gyel végigszorozva, és $u$ szerint integrálva, megkapjuk a kívánt relációt, ha az $R$ rezolvensre vonatkozó függvényegyenletet újból alkalmazzuk.

**1625.**

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n,$$

mivel elegendő kicsiny $|\lambda|$ mellett

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\int_{\Omega} R(P, P; \lambda)\, d\Omega_P = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda^n,$$

azért

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_m \lambda^m\right).$$

$\lambda$ megfelelő hatványainak együtthatóit egymással egyenlővé téve azt kapjuk, hogy

$$\alpha_1 + A_1 \alpha_0 = 0$$

$$2\alpha_1 + A_1 \alpha + A_2 \alpha_0 = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Felhasználva azt, hogy $\alpha_0 = 1$, az egyenletrendszer megoldása:

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n!} \begin{vmatrix} A_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & A_1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n & A_{n-1} & A_{n-2} & \dots & A_1 \end{vmatrix}.$$

**1626.** A rezolvens kiszámításához meg kell oldani az alábbi integrálegyenletet:

$$R(x, y; \lambda) - \int_0^1 K(x, t)\, R(t, y; \lambda)\, dt = K(x, y) \qquad (*)$$

rögzített $y$ mellett. Ha $x < y$, akkor

$$R(x, y; \lambda) - \lambda \int_0^x x\, R(t, y; \lambda)\, dt - \lambda \int_x^y t\, R(t, y; \lambda)\, dt - \lambda \int_y^1 t\, R(t, y\, \lambda)\, dt = x < y. \qquad (\ast\ast)$$

Ebből — kétszeri, $x$ szerinti differenciálással — a

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \lambda\, R(x, y; \lambda) = 0$$

egyenlet adódik. Ennek általános megoldása:

$$R(x, y; \lambda) = \alpha(y) \cos \sqrt{\lambda}\, x + \beta(y) \sin \sqrt{\lambda}\, x.$$

(*) egyenletből

$$R(0, y; \lambda) = 0,$$

tehát

$$R(x, y; \lambda) = \beta(y) \sin \sqrt{\lambda}\, x \qquad (\dagger)$$

alakú, ha $x < y$. Ha viszont $y < x$, akkor

$$R(x, y; \lambda) - \lambda y \int_0^y R(t, y; \lambda)\, dt - \lambda y \int_y^x R(t, y; \lambda)\, dt - \lambda x \int_x^1 R(t, y; \lambda)\, dt = y < x \quad (\ddagger$$

Ezt $x$ szerint differenciálva, a

$$\frac{\partial R}{\partial x} - \lambda \int_x^1 R(t, y; \lambda)\, dt = 0 \qquad (\mathring{\text{!}})$$

és

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \lambda R = 0$$

egyenletekre jutunk. Ez utóbbiból:

$$R(x, y; \lambda) = \gamma(y) \cos \sqrt{\lambda}\, x + \delta(y) \sin \sqrt{\lambda}\, x. \qquad (y < x)$$

De ($\circ$) egyenlet alapján

$$\left[\frac{\partial R}{\partial x}\right]_{x=1} = -\sqrt{\lambda}\, \alpha(y) \sin \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\, \beta(y) \cos \sqrt{\lambda} = 0,$$

amiből

$$R(x, y; \lambda) = \frac{\delta(y)}{\sin \sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda}\, (1 - x) \qquad (\mathring{\text{!}})$$

adódik.

Helyettesítsük (†) és ($\mathring{\text{!}}$) kifejezéseket ($\ast$), illetve ($\mathring{\text{!}}$) egyenletekbe:

$$\beta(y) \sin \sqrt{\lambda}\, x - \lambda x \beta(y) \int_0^x \sin \sqrt{\lambda}\, t\, dt - \lambda \beta(y) \int_x^y t \sin \sqrt{\lambda}\, t\, dt -$$

$$- \lambda \frac{\delta(y)}{\sin \sqrt{\lambda}} \int_y^1 t \cos \sqrt{\lambda}\, (1 - t)\, dt = x < y,$$

és

$$\frac{\delta(y)}{\sin \sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda}\, (1 - x) - \lambda y \int_0^y \beta(y) \sin \sqrt{\lambda}\, t\, dt - \lambda y \frac{\delta(y)}{\sin \sqrt{\lambda}} \int_y^x \cos \sqrt{\lambda}\, (1 - t)\, dt -$$

$$- \frac{\lambda x \delta(y)}{\sin \sqrt{\lambda}} \int_x^1 \cos \sqrt{\lambda}\, (1 - t)\, dt = y < x.$$

Legyen az így nyert első egyenletben $x = 0$, a másodikban $x = 1$, akkor a

$$\beta(y) \sin \sqrt{\lambda} \int_0^y t \sin \sqrt{\lambda}\, t\, dt + \delta(y) \int_y^1 t \cos \sqrt{\lambda}\, (1 - t)\, dt = 0$$

$$-\lambda \beta(y)\, y \sin \sqrt{\lambda} \int_0^y \sin \sqrt{\lambda}\, t\, dt + \delta(y) \left(1 - \lambda \int_y^1 \cos \sqrt{\lambda}\, (1 - t)\, dt\right) = 1$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ebből

$$\beta(y)=\frac{\cos\sqrt{\lambda}\,(1-y)}{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}}, \quad \text{és} \quad \delta(y)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,y}{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}.$$

Így

$$R(x,y;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\cos\sqrt{\lambda}\,(1-y)\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}}, & \text{ha} \quad x<y\\[2ex] \dfrac{\cos\sqrt{\lambda}\,(1-x)\sin\sqrt{\lambda}\,y}{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}}, & \text{ha} \quad y<x.\end{cases}$$

A Fredholm-féle determináns

$$D(\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}.$$

A sajátértékek a $\cos\sqrt{\lambda}=0$ egyenlet megoldásai:

$$\lambda_n=(2n+1)^2\frac{\pi^2}{4} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

**1627.** A Bunjakovszkij—Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$|g(\xi)-g(x)|^2=\left(\int_a^b[K(\xi,y)-K(x,y)]\,f(y)\,dy\right)^2\leqq\int_a^b[K(\xi,y)-K(x,y)]^2\,dy\cdot\int_a^b f(x)^2\,dx,$$

ebből az állítás azonnal következik.

**1628.**

$$\frac{\partial K\begin{pmatrix}x_1\ldots x_n\\ x_1\ldots x_n\end{pmatrix}}{\partial x_1}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial K(x_1\,x_1)}{\partial x}+\dfrac{\partial K(x_1\,x_1)}{\partial y} & K(x_1\,x_2)\ldots K(x_1\,x_n)\\ \dfrac{\partial K(x_2\,x_1)}{\partial y} & K(x_2\,x_2)\ldots K(x_2\,x_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{\partial K(x_n\,x_1)}{\partial y} & K(x_n\,x_2)\ldots K(x_n\,x_n)\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}K(x_1\,x_1) & \dfrac{\partial K(x_1\,x_2)}{\partial x} & K(x_1\,x_3)\ldots K(x_1\,x_n)\\ K(x_2\,x_1 & 0 & K(x_2\,x_3)\ldots K(x_2\,x_n)\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ K(x_n\,x_1) & 0 & K(x_n\,x_3)\ldots K(x_n\,x_n)\end{vmatrix}+\ldots$$

Ebből látható, hogy a

$$K\begin{pmatrix}x_1\,x_2\ldots x_n\\ x_1\,x_2\ldots x_n\end{pmatrix}$$

függvény és $x_1$ szerinti deriváltja eltűnik az $x_1 = x_2, x_3, \ldots, x_n$ helyen, ezek tehát legalább másodrendű gyökök, ezért a szóban forgó determináns osztható

$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 \ldots (x_1 - x_n)^2$$

szorzattal. Ugyanez a gondolatmenet megismétlendő $x_3, x_4, \ldots, x_n$ változókra.

**1629.** A magot definiáló sor egyenletesen konvergens, ezért az iteráltak képzésénél az integráljel alatt fellépő sorokat szabad tagonként integrálni. A $\sin \nu x$ függvények ortogonalitásának figyelembevételével az adódik, hogy

$$K(x, y) = \Pi^{n-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x \sin (\nu + n) y}{\nu^2(\nu + 1)^2 \ldots (\nu + n - 1)^2}.$$

Ebből

$$A_n = \int_0^{\pi} K_n(x, x)\, dx = 0,$$

$D(\lambda) \equiv 1$, vagyis $D(\lambda) = 0$ egyenletnek nincs gyöke.

**1630.** Az $R(x, y; \lambda) = \dfrac{D(x, y; \lambda)}{D(\lambda)}$ kifejezést helyettesítsük a rezolvens mag függvényegyenletébe $\lambda \neq \lambda_0$ esetén:

$$D(x, y; \lambda) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, D(t, y; \lambda)\, dt = K(x, y)\, D(\lambda).$$

Ha $\lambda \to \lambda_0$, akkor a jobboldal a zérushoz tart, mert $D(\lambda_0) = 0$. Ha $D(x, y; \lambda_0) \not\equiv 0$, akkor ez a mag egyik sajátfüggvénye.

**1631.**

$$K(y, x) = \int_y^x K_1(y, t)\, K_2(t, x)\, dx = \int_y^x K_2(x, t)\, K_1(t, y)\, dt =$$

$$= -\int_x^y K_2(x, t)\, K_1(t, y)\, dt = -K_2 \circ K_1.$$

**1632.** A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ konvergenciarádiusza legyen $r$, akkor létezik olyan $a > 0$ szám, melyre

$$|a_n| < \frac{a}{r^n}.$$

Másrészt a $K$ korlátos VOLTERRA-típusú mag iteráltjai a következőképpen becsülhetők meg:

$$|K_n(x, y)| \leqq M^n \frac{|x - y|^{n-1}}{(n - 1)!}, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ahol $M$ a $K$ felső korlátja. Így tehát a szóban forgó sor az

$$\frac{aM}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-y|^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{M}{r}\right)^{n-2}=\frac{aM}{r}e^{\frac{M}{r}|x-y|}$$

$x$-ben és $y$-ban egyenletesen konvergens sorral majorizálható.

**1633.** A $V(x, y; \lambda)$ VOLTERRA-típusú magnak megfelelő integráloperátort jelöljük $\mathcal{V}_\lambda$-val, akkor a megoldandó egyenlet így írható:

$$\mathcal{V}_\lambda+\mathcal{V}_\mu+\mathcal{V}_\lambda\mathcal{V}_\mu=\mathcal{V}_{\lambda+\mu},$$

vagy

$$(\mathcal{E}+\mathcal{V}_\lambda)(\mathcal{E}+\mathcal{V}_\mu)=\mathcal{E}+\mathcal{V}_{\lambda+\mu}.$$

Legyen $\mathcal{U}_\lambda=\mathcal{E}+\mathcal{V}_\lambda$, akkor $\mathcal{U}_\lambda\mathcal{U}_\mu=\mathcal{U}_{\lambda+\mu}$ (*)

egyenlet megoldásáról van szó, mely az $f(\lambda)f(\mu)=f(\lambda+\mu)$ függvényegyenlettel analóg. Mivel az iteráltképzés művelete hasonlít a hatványozáséhoz, megkíséreljük az utóbbit az

$$\mathcal{U}_\lambda=\mathcal{E}+\frac{\lambda}{1!}\mathcal{K}+\frac{\lambda^2}{2!}\mathcal{K}^2+\ldots+\frac{\lambda^n}{n!}\mathcal{K}^n+\ldots$$

sor által definiált operátorral kielégíteni. $K$ itt egy tetszőleges korlátos VOLTERRA-típusú magot jelent. Ez a sor **1632.** szerint minden $\lambda$ mellett konvergens, és a (*) alatti egyenletet valóban megoldja. Ennek alapján

$$V(x,y;\lambda)=\lambda K(x,y)+\frac{\lambda^2}{2!}K_2(x,y)+\ldots+\frac{\lambda}{n!}K_n(x,y)+\ldots$$

**1634.** Az $x^2+2x+a=0$ algebrai egyenlet megoldása:

$$x=-1\pm\sqrt{1-a}=-1\pm\left(1+\frac{1}{2}a-\frac{1}{8}a^2+\frac{5}{48}a^3\mp\ldots\right).$$

A jobb oldalon álló sor konvergenciarádiusza 1, tehát **1632.** feladat értelmében a

$$-\mathcal{E}\pm\left(\mathcal{E}+\frac{1}{2}\mathcal{A}-\frac{1}{8}\mathcal{A}^2+\frac{5}{48}\mathcal{A}^3\mp\ldots\right)$$

operátorsorok konvergensek, és az egyenletes konvergenciájuk miatt kielégítik a megoldandó egyenletet. $\mathcal{E}$ nem lévén integráloperátor, egyenletünk egyetlen magmegoldása:

$$K(x,y)=-\frac{1}{2}A(x,y)+\frac{1}{8}A_2(x,y)-\frac{5}{48}A_3(x,y)\mp\ldots.$$

**1635.** $t-y=\tau$ helyettesítés bevezetésével:

$$\int_x^y P(x-t)\,Q(t-y)\,dt=\int_{x-y}^0 P(x-y-\tau)\,Q(\tau)\,d\tau.$$

**1636.** Tegyük fel, hogy feladatunknak van megoldása. Akkor a kitűzött feladatban szereplő függvénysornak megfelelő hatványsor:

$$\zeta = e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots.$$

Ebből

$$z = \ln(1 + \zeta) = \zeta - \frac{\zeta^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{\zeta^n}{n!} + \ldots$$

Ez utóbbi hatványsornak a konvergenciarádiusza $1 \neq 0$, így **1632.** feladat állítása szerint

$$\Phi(x, y) - \frac{\Phi_2(x, y)}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{\Phi_n(x, y)}{n} + \ldots$$

abszolút és egyenletesen konvergens. Éppen ezért olyan függvényt állít elő, mely feladatunkat megoldja.

**1637.** A rezolvens mag az alábbi két integrálegyenletnek tesz eleget:

$$R(x, y; \lambda) = K(|x - y|) + \lambda \int_0^1 K(|x - t|)\, R(t, y; \lambda)\, dt \tag{*}$$

$$R(x, y; \lambda) = K(|x - y|) + \lambda \int_0^1 R(x, t; \lambda)\, K(|t - y|)\, dt. \tag{**}$$

Az első egyenletet differenciáljuk $x$ szerint:

$$\frac{\partial R(x, y; \lambda)}{\partial x} = \frac{\partial K(|x - y|)}{\partial x} + \lambda \int_0^1 \frac{\partial K(|x - t|)}{\partial x} R(t, y; \lambda)\, dt.$$

$\frac{\partial K(|x - t|)}{\partial x} = -\frac{\partial K(|x - t|)}{\partial t}$ figyelembevételével, parciális integrálás után azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial R(x, y; \lambda)}{\partial x} = \frac{\partial K(|x - y|)}{\partial x} - \lambda\, K(1 - x)\, R(1, y; \lambda) + \lambda\, K(x)\, R(0, y; \lambda) +$$

$$+ \lambda \int_0^1 K(|x - t|) \frac{\partial R(t, y; \lambda)}{\partial t}\, dt.$$

Ugyanennek az egyenletnek $y$ szerinti integrálásából

$$\frac{\partial R(x, y; \lambda)}{\partial y} = \frac{\partial K(|x - y|)}{\partial y} + \lambda \int_0^1 K(|x - t|) \frac{\partial R(t, y; \lambda)}{\partial y}\, dt$$

adódik. E két parciális differenciálhányados összege:

$$\frac{\partial R(x,y;\lambda)}{\partial x}+\frac{\partial R(x,y;\lambda)}{\partial y}-\lambda\int_0^1 K(|x-y|)\left[\frac{\partial R(t,y;\lambda)}{\partial t}+\frac{\partial R(t,y;\lambda)}{\partial y}\right]dt=$$

$$=\lambda K(x)R(0,y;\lambda)-\lambda K(1-x)R(1,y;\lambda)=\Phi(x,y;\lambda). \qquad (**)$$

Ez $\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}$ függvényre nézve egy lineáris integrálegyenlet ($\lambda$ nem sajátérték!), mely megoldható:

$$\frac{\partial R(x,y;\lambda)}{\partial x}+\frac{\partial R(x,y;\lambda)}{\partial y}=\Phi(x,y;\lambda)+\lambda\int_0^1 R(x,t;\lambda)\Phi(t,y;\lambda)\,dt.$$

Ide $\Phi$ értékét behelyettesítve, és tekintetbe véve (*) és ($\overset{*}{*}$) egyenleteket, kapjuk a bebizonyítandó relációt.

**1638.** 1°. Tegyük fel, hogy

$$K(x)=K(1-x),$$

kkor az **1637.** feladat megoldásában szereplő (*) egyenlet szerint

$$R(x,0;\lambda)=K(x)+\lambda\int_0^1 K(|x-t|)R(t,0;\lambda)\,dt$$

és

$$R(x,1;\lambda)=K(1-x)+\lambda\int_0^1 K(|x-t|)R(t,1;\lambda)\,dt.$$

Így

$$R(x,0;\lambda)-R(x,1;\lambda)=\lambda\int_0^1 K(|x-t|)\,[R(t,0;\lambda)-R(t,1;\lambda)]\,dt.$$

De $\lambda$ nem sajátérték, ezért

$$R(x,0;\lambda)=R(x,1;\lambda).$$

Hasonló gondolatmenettel adódik ($\overset{*}{*}$) egyenletből az, hogy

$$R(0,y;\lambda)=R(1,y;\lambda).$$

Ezeket figyelembe véve, az **1637.** feladat állítása szerint

$$\frac{\partial R(x,y;\lambda)}{\partial x}+\frac{\partial R(x,y;\lambda)}{\partial y}=0. \qquad (\dagger)$$

Ha pedig $K(x)=-K(1-x)$, akkor hasonló meggondolással nyerhető a bizonyítandó differenciálegyenlet.

2°. Fordítva, ha (†) érvényes, akkor **1637.** feladat állítása és megoldásában szereplő (**) egyenlet alapján

$$\frac{K(x)}{K(1-x)} = \frac{R(1,y;\lambda)}{R(0,y;\lambda)} = \frac{R(x,0;\lambda)}{R(x,1;\lambda)} = C.$$

De (*) egyenletből $y = 0$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$R(x,0;\lambda) = C\,K(1-x) + \lambda \int_0^1 K(|x-t|)\,\frac{R(1,t;\lambda)}{C}\,dt = C\,R(x,1;\lambda),$$

mert $R(x,y;\lambda)$ az $x$ és $y$ változókban szimmetrikus.

Másképpen:

$$R(x,1;\lambda) = K(1-x) + \frac{\lambda}{C^2}\int_0^1 K(|x-t|)\,R(1,t;\lambda)\,dt.$$

Másrészt (*)-ba $y = 1$-et helyettesítve, azt kapjuk, hogy

$$R(x,1;\lambda) = K(1-x) + \lambda \int_0^1 K(|x-t|)\,R(1,t;\lambda)\,dt.$$

Felhasználva azt, hogy $\lambda$ nem sajátérték, az utóbbi két egyenlet csak úgy állhat fenn, ha $C^2 = 1$.

**1639.** A $K_n(x,y) \equiv K(x,y)$ egyenletből következik, hogy

$$K_{n+1}(x,y) = K_2(x,y);\; K_{n+2}(x,y) = K_3(x,y);\; \dots$$

Elegendő kicsiny $|\lambda|$ mellett a rezolvens mag

$$R(x,y;\lambda) = K(x,y) + \lambda K_2(x,y) + \dots + \lambda^{n-2}K_{n-1}(x,y) + \lambda^{n-1}K(x,y) +$$

$$+ \lambda^n K_2(x,y) + \dots = [K(x,y) + \lambda K_2(x,y) + \dots + \lambda^{n-2}K_{n-1}(x,y)]\,[1 + \lambda^{n-1} +$$

$$+ \lambda^{2(n-1)} + \dots] = \frac{K(x,y) + \lambda K_2(x,y) + \dots + \lambda^{n-2}K_{n-1}(x,y)}{1-\lambda^{n-1}}.$$

Ebből az olvasható le, hogy az $R(x,y;\lambda)$ analitikus függvénynek a $|\lambda| = 1$ körön pólusa van, ha $K(x,y) \not\equiv 0$, ellentétben azzal a feltevéssel, hogy $K$ sajátérték nélküli mag.

**1640.** A keresett rezolvens mag legyen $R(x,y;\lambda)$, és $u$ az a függvény, melynek a következő tulajdonságai vannak:

$$u(x,x) = 0,\ \left(\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right)_{x=y} = 0\ (i = 1, 2, \dots, n-2),\ \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}\right)_{x=y} \equiv 1,$$

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \lambda R(x,y;\lambda).$$

Ez a függvény:

$$u(x, y; \lambda) = \frac{\lambda}{(n-1)!} \int_y^x R(t, y; \lambda) (x-t)^{n-2} dt + \frac{(x-y)^{n-2}}{(n-1)!}$$

$u$-t bevezetve a rezolvens magra jellemző integrálegyenletbe (vö. **1604.** feladatot), a

$$\frac{\partial^n u(x, y; \lambda)}{\partial x^n} = \lambda K(x, y) + \lambda \int_y^x K(x, t) \frac{\partial^n u(t, y; \lambda)}{\partial t^n} dt =$$

$$= \lambda K(x, y) + \lambda \left[ K(x, t) \frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}} - \frac{\partial K(x, t)}{\partial t} \frac{\partial^{n-2} u}{\partial t^{n-2}} + \ldots \pm \frac{\partial^{n-1} K(x, t)}{\partial t^{n-1}} u \right]_{t=y}^{t=x}$$

egyenletet kapjuk, ha a parciális integrálás elvét alkalmazzuk. Vegyük figyelembe $K$ alakját, továbbá azokat a feltételeket, melyeknek az $u$ segédfüggvény eleget tesz, azt nyerjük, hogy bármely rögzített $y$ mellett

$$L(u) \equiv \frac{\partial^n u}{\partial x^n} - \lambda \left[ a_0(x) \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + a_1(x) \frac{\partial^{n-2} u}{\partial x^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}(x) u \right] = 0,$$

vagyis $u$ rögzített $y$ mellett az $L(u) = 0$ differenciálegyenlet olyan integrálja, mely a CAUCHY-féle feltételeknek tesz eleget. Ha $r(x, y; \lambda)$ a differenciálegyenlet ilyen integrálja, akkor

$$R(x, y; \lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^n r(x, y; \lambda)}{\partial x^n}.$$

**1641.** Az állítással ellentétben létezne olyan $\|\varphi\| = 1$ függvény, melyre $\mathcal{K}\varphi = 0$ fennáll, ebből pedig $(\varphi, \mathcal{K}\varphi) = 0$ következik, ami a mag definit voltával ellenkezik.

**1701.**

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n x \sin n y}{n^2}$$

a jobb oldalon álló sor ugyanis abszolút és egyenletesen konvergens.

**1702.** Mivel

$$\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i} = \int_\Omega K(P, Q) \varphi_i(Q) d\Omega_Q,$$

azért $\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}$ minden $P$ mellett a $K(P, Q)$ FOURIER-együtthatói, a BESSEL-féle egyenlőtlenség miatt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(P)^2}{\lambda_i^2} \leqq \int_\Omega K^2(P, Q) d\Omega_Q = M^2 |\Omega|$$

$n$ minden értéke mellett.

**1703.** A

$$\varphi = \lambda \mathcal{K} \varphi \qquad \| \varphi \| = 1$$

egyenletből

$$\varphi = -\lambda \mathcal{K}^* \varphi,$$

és ebből

$$\bar{\varphi} = -\bar{\lambda} \mathcal{K}^* \bar{\varphi}.$$

Ha $\lambda \neq -\bar{\lambda}$, akkor $\int\limits_{\Omega} \varphi \bar{\varphi} \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} |\varphi|^2 d\Omega = 0$ (vö. **1603.** feladatot) ellentétben a $\| \varphi \| = 1$ kikötéssel.

**1704.** Legyen $\varphi = u + i v$, akkor $\varphi = \lambda \mathcal{K} \varphi$ helyett írható **1703.** figyelembevételével

$$u + i v = i \mu \mathcal{K}(u + i v),$$

azaz

$$u = -\mu \mathcal{K} v = \mu \mathcal{K}(-v) \text{ és } v = \mu \mathcal{K} u.$$

Az utóbbi egyenletből

$$v = -\mu \mathcal{K}^* u, \quad \text{vagy} \quad -v = \mu \mathcal{K}^* u.$$

**1705.** $x - y = t$ helyettesítéssel

$$\int\limits_0^1 K(x-y) e^{2\pi i n y} dy = \int\limits_x^{x-1} K(t) e^{2\pi i n (x-t)} dt = -e^{2\pi i n x} \int\limits_0^1 K(t) e^{-2\pi i n t} dt = \sigma_n e^{2\pi i n x};$$

$$\sigma_n = \frac{1}{\lambda_n} = -\int\limits_0^1 K(t) e^{-2\pi i n t}.$$

Mivel az $\{e^{2\pi i n x}\}$ függvényrendszer teljes, azért a szóban forgó magnak több sajátfüggvénye nincs.

**1706.**

$$|t| = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \ldots\right) \quad -\pi \leqq t \leqq \pi$$

$$K(x-y) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y}{1^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos 3x \cos 3y + \sin 3x \sin 3y}{3^2} + \ldots\right).$$

Ebből a sorfejtésből leolvasható, hogy

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi^2}; \; \lambda_1 = -\frac{1}{4}; \; \lambda_2 = -\frac{1}{4}; \; \lambda_3 = -\frac{3^2}{4}; \; \lambda_4 = -\frac{3^2}{4}; \ldots$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi}; \; \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x; \; \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x; \; \varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 3x; \; \varphi_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 3x; \ldots$$

**1707.**

$$K(x-y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin n\,x\cos n\,y-\cos n\,x\sin n\,y}{n}.$$

Ebből leolvasható, hogy

$$\mu_1=-\frac{1}{\pi};\quad \varphi_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x;\quad \psi_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos y,$$

$$\mu_2=\frac{1}{\pi};\quad \varphi_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x;\quad \psi_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin y,$$

$$\mu_3=-\frac{2}{\pi};\quad \varphi_3=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x;\quad \psi_3=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2y,$$

$$\mu_4=\frac{2}{\pi};\quad \varphi_4=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x;\quad \psi=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2y,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$A(x,y)=B(x,y)=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(x-y)}{n^2}.$$

**1708.** Egyik egyenletnek a másikba való behelyettesítésével kapjuk az alábbi két (azonos magú) egyenletet:

$$\psi(x)=\mu^2\int_0^1\int_0^1(y-x)\;(y-t)\,\psi(t)\,dy\,dt;\quad \varphi(x)=\mu^2\int_0^1\int_0^1(x-y)\;(t-y)\,\varphi(t)\,dy\,dt.$$

A mag elfajult, már több ízben szerepelt módszer alapján

$$\mu=\sqrt{12};\quad \varphi_1(x)\equiv 1;\quad \varphi_2(x)=\frac{\sqrt{12}}{2}(2x-1);\quad \psi_1(y)=\frac{\sqrt{12}}{2}(2y-1);\quad \psi_2(y)\equiv 1.$$

**1709.** A

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 K(|x-y|)\,\varphi(y)\,dy$$

egyenlet mindkét oldalát differenciáljuk:

$$\varphi'(x)=\lambda\int_0^1\frac{\partial K(|x-y|)}{\partial x}\varphi(y)\,dy. \qquad (!)$$

Mivel

$$\frac{\partial K(|x-y|)}{\partial x}=-\frac{\partial K(|x-y|)}{\partial y},$$

ezért az előbbi ($\frac{1}{0}$) egyenletben kijelölt integrálnak parciális módszerrel való kiszámítása után írhatjuk, hogy

$$\varphi'(x) - \lambda \int_0^1 K(|x-y|)\,\varphi'(y)\,dy = \lambda\,K(x)\,\varphi(0) - \lambda\,K(1-x)\,\varphi(1) =$$
$$= \lambda\,K(x)\,[\varphi(0) + \varphi(1)].$$

Itt figyelembe vettük, hogy $-K(1-x) = K(x)$. Másrészt

$$\varphi(0) = \lambda \int_0^1 K(y)\,\varphi(y)\,dy; \quad \varphi(1) = \lambda \int_0^1 K(1-y)\,\varphi(y)\,dy = -\lambda \int_0^1 K(y)\,\varphi(y)\,dy,$$

azaz

$$\varphi(0) + \varphi(1) = 0, \qquad (*)$$

tehát

$$\varphi'(x) - \lambda \int_0^1 K(|x-y|)\,\varphi(y)\,dy = 0,$$

vagyis $\varphi(x)$-szel együtt $\varphi'(x)$ is sajátfüggvény. Ha $\lambda$-hoz tartozó lineárisan független sajátfüggvények $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, akkor

$$\varphi_k'(x) = \alpha_{k1}\,\varphi_1(x) + \alpha_{k2}\,\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_{kn}\,\varphi_n(x), \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ahol $\alpha_{kl}$-ek az $x$-től függetlenek. Az ortogonálítás és a (*) peremfeltétel miatt

$$(\varphi_k', \varphi_l) + (\varphi_l', \varphi_k) = 0 = \alpha_{kl} + \alpha_{lk},$$

tehát az

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_{kl}]$$

mátrix ferdén szimmetrikus. A differenciálegyenlet-rendszer megoldása azért a következő alakú:

$$\varphi_k(x) = A_{k1}\sin\nu_k x + A_{k2}\cos\nu_k x + A_{k3}\,x\sin\nu_k x + A_{k4}\,x\cos\nu_k x + \ldots$$
$$\varphi_k(0) = A_{k2}$$
$$\varphi_k(1) = A_{k1}\sin\nu_k + A_{k2}\cos\nu_k + A_{k3}\sin\nu_k + A_{k4}\cos\nu_k + \ldots.$$

(*) peremfeltétel figyelembevételével

$$\varphi_k(0) + \varphi_k(1) = A_{k1}\sin\nu_k + A_{k2}(1 + \cos\nu_k) + A_{k3}\sin\nu_k + A_{k4}\cos\nu_k + \ldots = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

Az $|A_{kl}|_1^n$ determináns $\neq 0$, mert különben a $\varphi_k(x)$ függvények nem lennének lineárisan függetlenek, az előbbi egyenletrendszer csak úgy állhat fenn, ha

$$\sin\nu_k = 0; \quad \cos\nu_k = 0 \quad \text{és} \quad 1 + \cos\nu_k = 0.$$

De ez lehetetlen, ha $A_{k3}, A_{k4}, \ldots$ számok nem mind tűnnek el. Ha viszont $A_{k3} = A_{k4} = \ldots = 0$, akkor

$$\cos\nu_k = -1,$$

azaz $\nu_k = (2k + 1)\pi$, és ez megegyezik azzal, hogy $\sin \nu_k = 0$. A sajátfüggvények tehát

$$\varphi_k(x) = A_k \sin (2k + 1)\pi x + B_k \cos (2k + 1)\pi x$$

alakúak. A megfelelő sajátértékek reciprokai:

$$\frac{1}{\lambda_k} = \int_0^1 K(t) \cos (2k + 1)\pi t \, dt.$$

**1710.**

$$\varphi(x) = \cos \pi x + \sin \pi x; \quad \psi(y) = \cos \pi y - \sin \pi y.$$

**1711.**

$$A(x, y) = \min (x, y); \quad B(x, y) = 1 - \max (x, y) = \min (1 - x, 1 - y).$$

$$\varphi(x) = \mu \mathcal{A} \varphi = \mu \int_0^x y \varphi(y) \, dy + \mu x \int_x^1 \varphi(y) \, dy. \qquad (*)$$

Ebből

$$\varphi'(x) = -\mu \int_1^x \varphi(y) \, dy \qquad (\overset{*}{*})$$

és

$$\varphi''(x) = -\mu \varphi(x).$$

Mivel (*) és ($\overset{*}{*}$) alapján $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, azért ez utóbbi differenciálegyenlet megoldása:

$$\varphi_k = c_k \sin (2k - 1)\frac{\pi}{2} x \quad \text{és} \quad \mu_k = (2k - 1)^2 \frac{\pi^2}{4} \cdot \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Miután $B(x, y) = A(1 - x, 1 - y)$, azért $\psi_k(x) = \varphi_k(1 - x)$, azaz

$$\psi_k(x) = c_k \sin \frac{2k - 1}{2} \pi(1 - x).$$

**1712.** A $K(x, y) = -K(y, x)$ reláció figyelembevételével

$$K_2(x, y) = \int_a^b K(x, t) K(t, y) \, dt = \int_a^b K(t, x) K(y, t) \, dt = K_2(y, x),$$

a második iterált tehát szimmetrikus, vagyis van sajátértéke. De akkor $K(x, y)$ sem lehet sajátérték nélküli, ellenkező esetben $K_2(x, y)$ is sajátérték nélküli lenne, ami pedig lehetetlen.

**1713.** A

$$G(x, y) = \sqrt{P(x)} \, K(x, y) \sqrt{P(y)}$$

mag szimmetrikus, ezért van legalább egy $\lambda$ szám, mely mellett a

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b G(x, y) \varphi(y) \, dy$$

integrálegyenletnek van nem-triviális megoldása. De akkor a $z(x) = \sqrt{P(x)}\,\varphi(x)$ függvény sem azonosan eltűnő, ez pedig a

$$z(x) = \lambda \int_a^b L(x, y)\, z(y)\, dy$$

integrálegyenletet elégíti ki.

**1714.** Bizonyítás teljes indukcióval történik:

$$L_2(x, y) = \int_a^b K(x, t)\, P(t)\, K(t, y)\, P(y)\, dt = P(y) \int_a^b K(x, t)\, P(t)\, K(t, y)\, dt,$$

itt

$$G^{(2)}(x, y) = \int_a^b K(x, t)\, P(t)\, K(t, y)\, dt,$$

ez pedig $x$-ben és $y$-ban valóban szimmetrikus. Tegyük fel, hogy az állítás $(n-1)$-re igaz:

$$L_{n-1}(x, y) = P(y)\, G^{(n-1)}(x, y), \quad (G^{(n-1)}(x, y) = G^{(n-1)}(y, x)),$$

akkor egyrészt

$$L_n(x, y) = \int_a^b L_{n-1}(x, t)\, L(t, y)\, dt = P(y) \int_a^b G^{(n-1)}(x, t)\, P(t)\, K(t, y)\, dt = G^{(n)}(x, y)\, P(y);$$

másrészt

$$L_n(x, y) = \int_a^b L(x, t)\, L_{n-2}(t, y)\, dt = P(y) \int_a^b K(x, t)\, P(t)\, G^{(n-1)}(t, y)\, dt = G^{(n)}(y, x)\, P(y),$$

tehát $G^{(n)}(x, y) = G^{(n)}(y, x)$.

**1715.** Legyen $\psi$ az $L^*$ mag sajátfüggvénye:

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(t, x)\, P(x)\, \psi(t)\, dt = u(x)\, P(x).$$

Ezt az egyenletbe visszahelyettesítve:

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(t, x)\, P(t)\, u(t)\, dt = \lambda \int_a^b K(x, t)\, P(t)\, u(t)\, dt = \lambda \int_a^b L(x, t)\, u(t)\, dt,$$

tehát $u$ az egyik $\lambda$-hoz tartozó $\varphi$ sajátfüggvénnyel azonos.

**1716.** A keresett mag sajátértékei legyenek $\{\lambda_k\}$, a hozzátartozó sajátfüggvények $\{\varphi_k\}$. Akkor $K_n(x, y)$ sajátérték-rendszere $\{\lambda_k^n\}$, sajátfüggvény-rendszere $\{\varphi_k\}$. Ha tehát az $A$ mag sajátérték-rendszere $\{\mu_k\}$, sajátfüggvény-rendszere $\{\psi_k\}$, akkor

$$\varphi_k(x) = \psi_k(x) \quad \text{és} \quad \mu_k = \lambda_k^n; \quad \lambda_k = \sqrt[n]{\mu_k}. \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

A gyöknek itt tehát mindig a valósága veendő. Feladatunknak van megoldása (1.7.2) szerint, ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\mu_k^2}}$$

konvergens. Ez esetben a megoldás:

$$K(x, y) \sim \sum \frac{\psi_k(x)\, \psi_k(y)}{\sqrt[n]{\mu_k}}.$$

Ha $n$ páratlan, feladatunknak (ha van) csak egy megoldása létezik, ha $n$ páros, akkor a megoldások száma végtelen sok.

**1717.** A keresett mag sajátfüggvény-rendszere legyen $\{\varphi_n\}$, akkor ez a függvényrendszer $K_2$-nek is sajátfüggvény-rendszere, és így $K_2 + K$-nak, vagyis $A(x, y)$-nek is sajátfüggvény-rendszere, és fordítva. Ha $K$ sajátérték-rendszere $\{\lambda_k\}$, akkor

$$\mathcal{K}^2 \varphi_k + \mathcal{K} \varphi_k = \left(\frac{1}{\lambda_k^2} + \frac{1}{\lambda_k}\right) \varphi_k = \frac{1 + \lambda_k}{\lambda_k^2} \varphi_k,$$

vagyis $K_2 + K$ sajátérték-rendszere $\{(1 + \lambda_k)/\lambda_k^2\}$. Így tehát

$$\frac{1 + \lambda_k}{\lambda_k^2} = \mu_k,$$

ahol $\{\mu_k\}$ az adott $A$ mag sajátérték-rendszere. Ebből

$$\lambda_k = \frac{\mu_k \pm \sqrt{\mu_k^2 + 4\mu_k}}{2}.$$

A megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele tehát az, hogy $\mu_k \gtreqless {}^{0}_{-4}$, és hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/(\mu_k \pm \sqrt{\mu_k^2 + 4\mu_k})^2$$

sor konvergens legyen. Ez esetben a megoldások száma végtelen sok. Függvényegyenletünk megoldása:

$$K(x, y) \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(y)}{\mu_k \pm \sqrt{\mu_k^2 + 4\mu_k}}.$$

**1718.** $P(x, y)$ és $Q(x, y)$ sajátfüggvény-rendszere legyen $\{\varphi_k(x)\}$, $P$ sajátérték-rendszere $\{p_k\}$, a $Q$ magé legyen $\{q_k\}$. Egyenletünk megoldását keressük

$$K(x, y) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\, \varphi_n(y)}{\lambda_n} \tag{*}$$

alakban. Akkor az egyenlet értelmében

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\, \varphi_n(y)}{\lambda_n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\, \varphi_n(y)}{p_n \lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\, \varphi_n(y)}{q_n}.$$

Ebből felismerhető, hogy annak szükséges feltétele, hogy egyenletünket (*) alakú maggal ki lehessen elégíteni, az, hogy $Q(x, y)$ sajátfüggvények szerint haladó sora abszolút és egyenletesen konvergens legyen. A bal oldalon álló sorok abszolút és egyenletesen konvergensek. Ezen egyenletből

$$\frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{1}{p_n}\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{q_n} = 0. \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Ez viszont azt jelenti, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egyenletünket (*) alatt álló maggal ki lehessen elégíteni az, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n^2}$$

sor konvergens legyen, ahol $d_n$ jelenti a $P_2(x, y) + 4Q(x, y)$ mag sajátértékeit.

**1719.** A rezolvens magra jellemző függvényegyenlet szerint (vö. **1604.** feladat)

$$R(x, y; \lambda) - K(x, y) = \lambda \int_a^b K(x, t)\, R(t, y; \lambda)\, dt. \qquad (\text{°})$$

Ha $\varphi_k$ a $K$ egy sajátfüggvénye, akkor sajátfüggvénye $K_n(x, y)$-nak $(n = 2, 3, \ldots)$, így $R$-nek is. Legyen $R(x, y; \lambda)$ magnak $\varphi_k$-hoz tartozó sajátértéke $\mu_k$, akkor egyrészt

$$\mathcal{R}_\lambda \varphi_k - \mathcal{K} \varphi_k = \left(\frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\lambda_k}\right) \varphi_k,$$

másrészt

$$\mathcal{R}_\lambda \varphi_k - \mathcal{K} \varphi_k = \lambda\, \mathcal{K} \mathcal{R}_\lambda \varphi = \frac{\lambda}{\mu_k} \mathcal{K} \varphi = \frac{\lambda}{\mu_k \lambda_k} \varphi_k,$$

vagyis

$$\frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\lambda_k} = \frac{\lambda}{\mu_k \lambda_k}, \quad \text{tehát} \quad \lambda_k - \mu_k = \lambda, \quad \text{azaz} \quad \mu_k = \lambda_k - \lambda$$

a rezolvens mag sajátértékei. Ezért a $R(x, y; \lambda) - K(x, y)$ sajátértékei:

$$\nu_k = \frac{\mu_k \lambda_k}{\lambda} = \frac{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)}{\lambda}.$$

Érvényes tehát, hogy

$$R(x, y; \lambda) - K(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(y)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)}.$$

A jobb oldalon álló sor abszolút és egyenletesen konvergens, és előállítja $R(x, y; \lambda) - K(x, y)$ magot, mert e mag (°) egyenlet szerint $K$-val forrásszerűen előállított függvény.

**1720.** A szóban forgó egyenlet mindkét oldalán alkalmazzuk az $\mathcal{E} - \lambda \mathcal{K}^*$ operátort, akkor

$$(\mathcal{E} - \lambda [\mathcal{K} + \mathcal{K}^* - \lambda \mathcal{K}^* \mathcal{K}])\, \varphi = F_\lambda \qquad (*)$$

és fordítva; mivel $\lambda$ nem sajátérték, azért $\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{K}^*$ egyértelmű inverze létezik, és így (*)-ból következik a szóban forgó integrálegyenlet.

**1721.** Legyen

$$(\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{K})\,\varphi = \psi; \quad (\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{K}^*)\,\Phi = \Psi,$$

akkor

$$(\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{K})\,\psi = (\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{K})\,(\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{G})\,\varphi = (\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{P}_\lambda)\,\varphi,$$

$$(\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{G}^*)\,\Psi = (\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{G}^*)\,(\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{K}^*)\,\Phi = (\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{P}_\lambda^*)\,\Phi.$$

Mármost, ha $\| \varphi \| = 1$, és

$$(\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{G})\,\varphi = 0,$$

akkor

$$(\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{P}_\lambda)\,\varphi = 0.$$

Ha $(\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{K}^*)\,\Phi = 0$, akkor $\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{P}_\lambda^*$ is $= 0$.

Fordítva: feltéve, hogy

$$(\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{P}_\lambda)\,\varphi = 0 \quad (\| \varphi \| = 1),$$

akkor vagy

$$(\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{G})\,\varphi = 0,$$

vagy pedig ha $(\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{G})\,\varphi = \psi \not\equiv 0$, akkor $(\mathcal{E} - \lambda\,\mathcal{K})\,\psi = 0$.

**1722.** Tegyük fel, hogy a $\varphi$ és $\psi$ függvények mellett $I$ minimális. Helyettesítsük $I$-be $\varphi$ helyett $\varphi + \alpha\,\varphi_1$-et, $\psi$ helyett $\psi + \beta\,\psi_1$ függvényeket, akkor $\alpha$ és $\beta$ következő függvényét kapjuk:

$$I(\alpha, \beta) = \int_a^b \int_a^b [K(x, y) - (\varphi(x) + \alpha\,\varphi_1(x))\,(\psi(y) + \beta\,\psi_1(y))]^2\,dx\,dy.$$

Itt $\varphi_1$ és $\psi_1$ tetszőleges, nem azonosan eltűnő függvények. $I(\alpha, \beta)$ eléri a minimumot, ha $\alpha = 0$ és $\beta = 0$, így tehát

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} = 0 \quad \text{és} \quad \left(\frac{\partial I}{\partial \beta}\right)_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} = -2\int_a^b \int_a^b [K(x, y) - \varphi(x)\,\psi(y)]\,\psi(y)\,\varphi_1(x)\,dx\,dy = 0.$$

Miután $\varphi_1$ tetszőleges függvény, az előbbi egyenlet csak úgy állhat fenn, ha

$$\int_a^b [K(x, y)\,\psi(y) - \varphi(x)\,\psi(y)^2]\,dy = 0,$$

azaz

$$\int_a^b K(x, y)\,\psi(y)\,dy = c\,\varphi(x).$$

Teljesen hasonló számítással adódik a $\left(\frac{\partial I}{\partial \beta}\right)_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} = 0$ feltételből az, hogy

$$\int_a^b K(x, y)\, \varphi(x)\, dx = c'\, \psi(y).$$

Ez azt jelenti, hogy $\varphi$ a $\mathcal{K}\mathcal{K}^*$-nak, $\varphi$ pedig a $\mathcal{K}^*\mathcal{K}$ mag sajátfüggvénye, vagyis mindkettőt egy-egy számmal szorozva, ugyanazokat az egyenleteket fogják kielégíteni. Ha tehát $\varphi$ helyett $\sqrt[4]{\frac{c'}{c}}\,\varphi(x)$-szet, $\psi$ helyett $\sqrt[4]{\frac{c}{c'}}\,\psi(y)$-t írunk, akkor ezek a függvények kielégítik ezt az integrálegyenlet-rendszert:

$$\frac{1}{\sqrt{cc'}}\,\mathcal{K}\,\psi = \varphi; \quad \frac{1}{\sqrt{cc'}}\,\mathcal{K}^*\,\varphi = \psi.$$

$c$ és $c'$ természetesen pozitív számok.

**1723.** A

$$K(x, y) = xy - \frac{x+y}{3} + \frac{1}{3}$$

szimmetrikus mag legkisebb sajátértéke 12, ezért $\sigma = \frac{1}{12}$. A maximum $\varphi_1 = 1$ és $\varphi_2(x) = x\sqrt{12} - \sqrt{3}$ függvényeknél érhetők el. (Vö. **1231.** feladatot!)

**1724.**

$$K(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\, \frac{e^{i\vartheta}\, e^{-i\vartheta} - r\, e^{-i\varphi}}{e^{i\vartheta} - r\, e^{i\varphi}\; e^{-i\vartheta} - r\, e^{-i\varphi}} = \frac{1 - e^{i(\vartheta-\varphi)}}{1 + r^2 - 2r\cos(\vartheta - \varphi)},$$

vagyis $K(\vartheta, \varphi) = K(\vartheta - \varphi)$ alakú, ahol $K(t) = \frac{1 - e^{it}}{1 + r^2 - 2r\cos t}$, a $t$-nek $2\pi$ szerint periodikus függvénye. Az **1705.** feladat állításai szerint sajátfüggvényei tehát:

$$f_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ni\varphi}. \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\vartheta}}{e^{i\vartheta} - r\, e^{i\varphi}}\, e^{-in\varphi}\, d\varphi$$

kiszámítása révén nyerhetjük a sajátértékeket. Legyen $e^{i\varphi} = z$, akkor az előbbi integrál az alábbiba megy át:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^{i\vartheta}\, dz}{z^{n+1}\,(e^{i\vartheta} - r\, z)} = r^n\, e^{-in\vartheta}.$$

Az integrálást az egységkör mentén végezzük. Ebből látható, hogy $\lambda^n = \frac{1}{r^n}$.

**1725.** A feltevés szerint
$$\varphi - \nu^n \mathcal{K}^n \varphi = 0,$$
vagy
$$(\mathcal{E} - \nu \mathcal{K})(\mathcal{E} - \nu \varepsilon \mathcal{K})(\mathcal{E} - \nu \varepsilon^2 \mathcal{K}) \ldots (\mathcal{E} - \nu \varepsilon^{n-1} \mathcal{K}) \varphi = 0.$$
Ha $(\mathcal{E} - \nu \varepsilon^{n-1} \mathcal{K}) \varphi = 0$, akkor az állítás igaz. Ha $(\mathcal{E} - \nu \varepsilon^{n-1} \mathcal{K}) \varphi = \varphi_1 \not\equiv 0$ és
$$(\mathcal{E} - \nu \varepsilon^{n-2} \mathcal{K}) \varphi_1 = 0,$$
az állítás is igaz, mert $\nu \varepsilon^{n-2}$ sajátérték, $\varphi_1 = \varphi - \nu \varepsilon^{n-1} \mathcal{K} \varphi$ sajátfüggvény. De ha $(\mathcal{E} - \nu \varepsilon^{n-2} \mathcal{K}) \varphi_1 = \varphi_2 \not\equiv 0$, és $(\mathcal{E} - \nu \varepsilon^{n-3} \mathcal{K}) \varphi_2 = 0$, akkor is igaz az állítás, mert $\nu \varepsilon^{n-3}$ sajátérték, melyhez tartozó sajátfüggvény
$$\varphi_2 = (\mathcal{E} - \nu \varepsilon^{n-2} \mathcal{K})(\mathcal{E} - \nu \varepsilon^{n-1} \mathcal{K}) \varphi = (\mathcal{E} - \nu \varepsilon^2 \mathcal{K} + \nu^2 \varepsilon^{2(n-1)} \mathcal{K}^2) \varphi_n$$
s í. t. Ha a $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}$ függvények közül egy sem azonosan eltűnő, végül eljutunk az
$$(\mathcal{E} - \nu \mathcal{K}) \varphi_{n-1} = 0$$
egyenletre.

**1726.** *a)* $\psi(x) \not\equiv 0$. Akkor
$$\mathcal{A} \mathcal{B} \varphi = \mathcal{B} \mathcal{A} \varphi,$$
lévén $\psi$ definíciója szerint
$$\frac{1}{\lambda} \mathcal{A} \psi = \frac{1}{\lambda} \mathcal{B} \varphi = \frac{\psi}{\lambda^2},$$
ebből
$$\psi = \lambda \mathcal{A} \psi.$$
*b)* eset is előfordulhat, ha például
$$B(x, y) = A(x, y) - \lambda A_2(x, y).$$
Világos, hogy ez esetben $A * B = B * A$ teljesül, másrészt
$$\mathcal{B} \varphi = \mathcal{A} \varphi - \lambda \mathcal{A}_2 \varphi = \frac{1}{\lambda} \varphi - \frac{1}{\lambda} \varphi \equiv 0.$$

**1727.** $\varphi$ legyen $K$-nak egyik $\lambda$-hoz tartozó sajátfüggvénye. Akkor
$$\mathcal{F} \varphi = a_1 \mathcal{K} \varphi + a_2 \mathcal{K}_2 \varphi + \ldots + a_n \mathcal{K}_n \varphi = \left( \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2}{\lambda^2} + \ldots + \frac{a_n}{\lambda^n} \right) \varphi = f\left( \frac{1}{\lambda} \right) \varphi.$$

**1728.** Nyilván $0 < A_n(x, y) \leqq B_n(x, y)$, tehát a $B$ mag NEUMANN-sora majorizálja az $A$ mag NEUMANN sorát. De akkor $B$ NEUMANN-sorának konvergenciarádiusza nem kisebb, mint $A$ NEUMANN-sorának konvergenciarádiusza.

**1729.** $K(x, y)$ folytonossága miatt
$$K_n(x, y) \geqq m > 0; \quad K_2(x, y) = \int_a^b K(x, t) K(t, y) \, dt \geqq m^2 (b - a); \ \ldots$$
$$\ldots; K_n(x, y) = \int_a^b K_{n-1}(x, t) K(t, y) \, dt \geqq m^n (b - a)^{n-1}.$$

NEUMANN-sora tehát minorizálható a következő módon:

$$K(x,y) + \lambda K_2(x,y) + \ldots + \lambda^n K_{n+1}(x,y) + \ldots \geqq m + \lambda m^2 (b-a) +$$
$$+ \lambda^2 m^3 (b-a)^2 + \ldots = m(1 + \lambda m(b-a) + \lambda^2 m^2 (b-a)^2 + \ldots) =$$
$$= \frac{m}{1 - \lambda m(b-a)},$$

ennélfogva a bal oldal nem lehet transzcendens egész, vagyis a NEUMANN-sornak van legalább egy pólusa.

1730. Az állítás az (1.7.10) maximumelv közvetlen folyománya.

1731. Az

$$\ln[1 - e^{i(x+y)}] + \ln[1 - e^{i(x-y)}] = \ln(1 - e^{i(x+y)})(1 - e^{i(x-y)}) =$$
$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik(x+y)}}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik(x-y)}}{k}$$

sorfejtésből a valós részek összehasonlításából adódik, hogy

$$K(x,y) = \frac{1}{\pi} \ln|\cos x - \cos y| = -\frac{\ln 2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx \cos ky}{k}. \quad (x \neq y)$$

Ebből leolvasható, hogy

$$\varphi_0 = -\ln 2, \quad \varphi_k(x) = -\cos kx, \quad \lambda_k = k.$$

1732.

$$K(s,t) = \ln\left|\frac{1 - \cos(s+t)}{1 - \cos(s-t)}\right| = \operatorname{Re} \ln \frac{1 - e^{i(s+t)}}{1 - e^{i(s-t)}} =$$
$$= \operatorname{Re}\left[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik(s+t)}}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik(s-t)}}{k}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ns \sin nt}{n}. \quad (s \neq t)$$
$$\varphi_n(s) = \sin ns; \quad \lambda_n = n.$$

1733.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|} e^{i\alpha t}\, dt = \int_{-\infty}^{x} e^{-x+t} e^{i\alpha t}\, dt + \int_{x}^{\infty} e^{-t+x} e^{i\alpha t}\, dt =$$
$$= e^{-x}\left[\frac{e^{(i\alpha+1)t}}{i\alpha+1}\right]_{-\infty}^{x} + e^{x}\left[\frac{e^{(i\alpha-1)t}}{i\alpha-1}\right]_{x}^{\infty} = e^{i\alpha x}\left(\frac{1}{i\alpha+1} - \frac{1}{i\alpha-1}\right) =$$
$$= \frac{2}{1+\alpha^2} e^{i\alpha x}; \quad \lambda = \frac{1+\alpha^2}{2} > \frac{1}{2}.$$

1734. Legyen $\psi_k(x) = \sqrt{2} \sin k\pi x \quad (k = 1, 2, \ldots)$, akkor

$$A_{ik} = \frac{(-1)^{i+k}}{ik\pi}, \text{ ha } i \neq k \text{ és } A_{ii} = \frac{2}{i^2 \pi}.$$

Ha $n = 2$, akkor, mivel a mag pozitív definit, az

$$F = \frac{1}{\pi^2}\left(2a_1^2 - a_1 a_2 + \frac{1}{2} a_2^2\right)$$

kifejezés maximumát kell meghatároznunk az $a_1^2 + a_2^2 = 1$ feltétel mellett. (1.7.15) alatti jelölést használva, $\tau = \sigma \pi^2$:

$$\begin{vmatrix} 2-\tau & -1 \\ -1 & 2-4\tau \end{vmatrix} = 0.$$

Ennek a nagyobbik gyöke $\tau \approx 2{,}15$, ebből

$$\lambda_1 \approx \frac{\pi^2}{2{,}15} \approx 4{,}59.$$

Ha $n = 3$, akkor ismét $\tau = \sigma \pi^2$ jelölés alkalmazásával

$$\begin{vmatrix} 2-\tau & -1 & 1 \\ -1 & 2-4\tau & -1 \\ 1 & -1 & 2-9\tau \end{vmatrix} = 0.$$

Ennek a legnagyobb gyöke 2,22, tehát

$$\lambda_1 \approx \frac{\pi^2}{2{,}22} \approx 4{,}47.$$

**1735.** Ha $y < x$, akkor

$$K_2(x, y) = \frac{1}{4}\int_0^y (2-x)(2-y)\, t^2\, dt + \frac{1}{4}\int_y^x t(2-t)\, y(2-x)\, dt + \frac{1}{4}\int_x^1 xy\,(2-t)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{12}\left[-y^3(2-x) + y(x^3 - 6x^2 + 7x)\right].$$

$K$ szimmetrikus volta miatt

$$K_2(x, y) = \frac{1}{12}\left[-x^3(2-y) + x(y^3 - 6y^2 + 7y)\right], \qquad \text{ha } x < y.$$

Tehát

$$A_2 = \int_0^1\int_0^1 K(x, t)\, K(t, x)\, dx\, dt = \int_0^1\int_0^1 K(x, t)^2\, dx\, dt.$$

A $0 \leqq x \leqq 1$; $0 \leqq y \leqq 1$ négyzetet bontsuk fel az $y = x$ egyenletű átlóval két háromszögre: nevezzük az $x > y$ háromszöget $\Omega_1$-nek, a másikat $\Omega_2$-nek. Akkor $K$ szimmetriája miatt

$$A_2 = \iint_{\Omega_1} K(x, t)^2\, dt\, dx + \iint_{\Omega_2} K(x, t)^2\, dt\, dx = 2\iint_{\Omega_1} K(x, t)^2\, dx\, dt = 2\int_0^1\int_0^x K(x, t)^2\, dx\, dt.$$

Könnyen belátható, hogy általában

$$A_{2n} = 2 \int_0^1 \int_0^1 K_n(x, t)^2 \, dx \, dt. \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

A mi esetünkben

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \int_0^x y^2 (2 - x)^2 \, dy \right] dx = \frac{11}{180}$$

$$A_4 = \frac{1}{72} \int_0^1 \left( \int_0^x [- y^3 (2 - x) + y(x^3 - 6x^2 + 7x)]^2 \, dy \right) dx = \frac{113}{32\,400} .$$

(1.7.10) képletet alkalmazva, azt kapjuk, hogy

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{A_2}{A_4}} \approx 4{,}186.$$

**1736.** Legyen $\omega(x) = x$

$$\omega_1(x) = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{6}, \quad \| \omega_1(x) \| = 0{,}1371,$$

$$\omega_2(x) = \frac{31x}{360} - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{120}; \quad \| \omega_2(x) \| = 0{,}03328,$$

$$\omega_3(x) = \frac{1}{360} \left( \frac{161}{21} x - \frac{31}{6} x^3 + x^5 - \frac{x^7}{14} \right); \quad \| \omega_3(x) \| = 0{,}0080083.$$

Minthogy $K$ pozitív definit, azért $K$ sajátértékei is pozitívok (1.7.18) alapján

$$\lambda_1 \approx 4{,}998.$$

A hozzátartozó sajátfüggvény közelítő kifejezése:

$$\varphi_1(x) \approx 2{,}643\, x - 1{,}724\, x^3 + 0{,}347\, x^5 - 0{,}025\, x^7.$$

**1737.**

$$\varphi(y) = a \sin x \; (+ \text{ tetszőleges páros függvény}).$$

**1738.** Nincs megoldása, mert a PICARD-tétel 1° követelménye nem teljesül.

**1739.** Ennek az egyenletnek sincsen megoldása, mert bár a PICARD-tétel 1° alatti követelése teljesül, de a 2° alatti nincs kielégítve:

$$\sum_1^\infty \lambda_n^2 f_n^2 = \sum_1^\infty n^4 \frac{1}{n^2} = \sum_1^\infty n^2 = \infty .$$

**1740.** Mivel **1707.** feladat eredménye szerint a mag bal oldali SCHMIDT-féle sajátfüggvény-rendszere teljes, a PICARD-féle tétel 1° követelménye teljesül. Másrészt, mivel

$$| \sin x | = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n - 1)\,(2n + 1)} \cos 2nx,$$

azért

$$f_0 = \frac{2}{\pi}, \quad f_n = -\frac{\sqrt{\pi}}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

A SCHMIDT-féle sajátértékek

$$\lambda_n = \frac{n}{\pi}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

így tehát ez esetben a $\sum \lambda_n^2 f_n^2$ sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)^2 (2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}.$$

Ez utóbbi konvergens lévén, egyenletünknek van megoldása, éspedig a SCHMIDT-féle sajátfüggvény-rendszer teljessége miatt lényegében csakis egy megoldás létezik. E megoldás

$$\varphi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} (\cos nx - \sin nx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \sin\left(nx - \frac{\pi}{4}\right).$$

**1741.** Az

$$f(n+1) = \int_0^1 y^n \varphi(y)\, dy \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

momentumok ismertek. $\{y^n\}$ függvényrendszert ortonormalizáljuk $(0, 1)$-ben, e függvényrendszer $n$ fokú tagja a

$$\Phi_n(y) = a_n^{(0)} + a_n^{(1)} y + \ldots + a_n^{(n)} y^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

alakú polinom. Ezért

$$a_n^{(0)} f(1) + a_n^{(1)} f(2) + \ldots + a_n^{(n)} f(n+1) = \int_0^1 \Phi_n(y) \varphi(y)\, dy = c_n$$

ismert FOURIER-együtthatók. Annak szükséges feltétele, hogy egyenletünknek legyen megoldása, az, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$$

konvergens legyen. Ha ezenkívül $f(x)$ a komplex számsíkba analitikusan folytatható úgy, hogy $f(z)$ reguláris a $\mathrm{Re}\, z > 1$ félsíkban, továbbá $\lim_{z \to 1} f(z) = f(1)$, akkor az előbbi sor konvergenciája a megoldhatóságnak nemcsak szükséges, hanem elégséges feltétele is.

**1742.** Az állítás igaz, mert

$$\int_0^x t^{x-t}\, t^{t-1}\, dt = \int_0^x t^{x-1}\, dt = x^{x-1}.$$

A szóban forgó mag az $x = 0$, $t = 0$ helyen nem korlátos, sőt, a $[0, x]$ számközön nem is integrálható, így a feladatban szereplő tény nincsen ellentétben az idézett tétellel.

**1743.** Ha $n > 1$, és $\operatorname{Re} \alpha > 0$, akkor

$$\int_x^\infty \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-\alpha t}\, dt = \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^{n+1}},$$

azért $\lambda = \alpha^{n+1}$, vagyis $\lambda$ sajátérték, ha $\operatorname{Re} \lambda^{\frac{1}{n+1}} > 0$, tehát minden $\lambda \neq 0$ valós vagy komplex szám sajátérték.

Ha $n = 1$, $\lambda$ sajátérték, feltéve, hogy nem zérus, és nem negatív valós.

Ha $n = 0$, minden olyan $\lambda$ sajátérték, melynek valós része pozitív.

**1744.** Mivel

$$\int_0^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right) t^\alpha\, dt = \frac{x^\alpha}{\alpha(\alpha+1)},$$

ha $\operatorname{Re} \alpha > 0$; $\lambda = \alpha(\alpha+1) = \alpha^2 + \alpha$, tehát $\operatorname{Re}\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}\right) > 0$ feltételnek eleget tevő $\lambda$ biztosan sajátérték, azaz a komplex számsíkon, ha a $\lambda$ számnak megfelelő pont az $\eta^2 = \xi$ parabolán kívül fekszik, akkor $\lambda$ sajátérték.

**1745.** A

$$\int_0^\infty \sin xy \cdot e^{-ay}\, dy = \frac{x}{a^2 + x^2} \quad \text{és} \quad \int_0^\infty \sin xy \cdot \frac{y}{a^2+y^2}\, dy = \frac{\pi}{2} e^{-ax}$$

ismert integrálformulákból

$$\int_0^\infty \sin xy \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-ay} + \frac{y}{a^2+y^2}\right) dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-ax} + \frac{x}{a^2+x^2}\right).$$

**1746.** Közismert, hogy

$$\int_\Omega P_n [\cos \widehat{POQ}]\, U_n(Q)\, d\Omega_Q = \frac{4\pi}{2n+1} U_n(Q),$$

ahol $U_n(P)$ bármely, az $n$ indexhez tartozó gömbfelületi függvényt jelenti ($\Omega$ az egységgömb felülete). Az $U_n$ függvényeken kívül a $K(P, Q) = P_n [\cos \widehat{POQ}]$ magnak más

sajátfüggvénye nincs is, mert ellenkező esetben a $P_n\,[\cos \widehat{POQ}]$-ra vonatkozó LEGENDRE-féle addiciós tétel értelmében a tetszőleges $\Phi(P)$ sajátfüggvény

$$\sum_{k=0}^{n} P_n^k(\cos\vartheta)\,[A_{nk}\cos k\varphi + B_{nk}\sin k\varphi]$$

alakú volna, ahol $\vartheta$ és $\varphi$ a $P$ pont szferikus koordinátáit jelenti. Ebből viszont az következik, hogy $\Phi(P)$ szintén gömbfelületi függvény, vagyis az $S_{ni}(P)$ függvények lineáris kombinációja. Ebből viszont az állítás már nyilvánvaló, mert az elmondottak alapján

$$P_n\,[\cos\widehat{POQ}] - \frac{4\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} S_{nk}(P)S_{nk}(Q)$$

tehát olyan szimmetrikus mag, melynek nincsen sajátfüggvénye, vagyis azonosan zérus.

**1747.**

$$x^n = \frac{n!}{3\cdot 5\ldots(2n+1)}\Bigg[(2n+1)\,P_n(x) + (2n-3)\,\frac{2n+1}{2}\,P_{n-2}(x) + + (2n-7)\,\frac{(2n+1)\,(2n-1)}{2\cdot 4}\,P_{n-4}(x) + \ldots\Bigg]$$

formulába helyettesítsünk $x$ helyébe $\cos^n\widehat{POQ}$-t, és alkalmazzuk az **1746.** feladat eredményét:

$$\cos^n\widehat{POQ} = \frac{4n!\,\pi}{3\cdot 5\ldots(2n+1)}\Bigg\{[S_{n1}(P)S_{n1}(Q) + \ldots + S_{n,2n+1}(P)\,S_{n,2n+1}(Q)] + + \frac{2n+1}{2}[S_{n-2,1}(P)S_{n-2,1}(Q) + \ldots + S_{n-2,2n-3}(P)\,S_{n-2,2n-3}(Q)] + + \frac{(2n+1)\,(2n-1)}{2\cdot 4}[S_{n-4,1}(P)S_{n-4,1}(Q) + \ldots + S_{n-4,2n-7}(P)S_{n-4,2n-7}(Q)] + \ldots\Bigg\}.$$

Ebből következik, hogy

$$S_{n-2k,i}(P) = = \frac{3\cdot 5\ldots(2n+1)}{4\pi\,n!}\;\frac{2k!}{(2n+1)\,(2n-1)\ldots(2n+k-1)}\int_{\Omega}\cos^n\widehat{POQ}\,S_{n-2k,i}(Q)\,d\Omega_Q,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right],\quad i = 1, 2, \ldots, (2n-4k+1).$$

**2101.** $n = 2$-re (2.1.1)

$$L[y] = f_0(x)\,y + f_1(x)\,y' + f_2(x)\,y''.$$

Ennek adjungáltja [l. (2.1.3) formulát]

$$M[y] = f_0 y - (f_1 y)' + (f_2 y)'' = (f_0 - f_1' + f_2'')\,y - (f_1 - 2f_2')\,y' + f_2 y''$$

Minden számbajövő $y$ mellett $L[y] = M[y]$ akkor és csak akkor, ha

$$f_0 = f_0 - f_1' + f_2''; \quad f_1 = -f_1 + 2f_2,$$

vagyis $f_1 = f_2'$ és így

$$L[y[ = f_0 y + f_2' y' + f_2 y'' = f_0 y + (f_2 y')'.$$

Szokásos az $f_2 \equiv p$ és $f_0 \equiv -q$ jelölés használata.

2102. $y'' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldása: $y = \alpha x + \beta$. A $P_1[y] = 0$ feltételnek eleget tevő egyik partikuláris megoldás $y_1 = x$, csupán a $P_2[y] = 0$-t kielégítő partikuláris integrál $y_2 = 1 - x$. $y_1$ és $y_2$ lineárisan függetlenek, ezért a kitűzött feladatnak van megoldása. Jelen esetben $p(x) = 1$, ezért

$$c_1 t - c_2(1 - t) = 0; \quad c_1 + c_2 = 1$$

egyenletrendszerből $c_1 = 1 - t$; $c_2 = t$. A keresett GREEN-függvény

$$G(x, t) = \begin{cases} (1 - t)\, x, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq t \leqq 1, \\ (1 - x)\, t, & \text{ha} \quad 0 \leqq t \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

A sajátfüggvények megállapítása érdekében tekintsük az $y'' + \lambda y = 0$ differenciálegyenletet a $P_1 = P_2 = 0$ peremfeltételek mellett. A szóban forgó homogén peremérték-feladatnak nem-triviális megoldása akkor és csak akkor van, ha $\lambda = n^2\pi^2$ ($> 0$ $n = 1, 2, \ldots$). $\lambda_n$-hez tartozó sajátfüggvény $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n\pi x$. MERCER tétele szerint tehát

$$G(x, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x \sin n\pi t}{n^2}.$$

2103. Az $y'' = 0$ differenciálegyenlet egyik, $P_1[y] = 0$ feltételnek eleget tevő partikuláris megoldása $y_1 = x$, csupán $P_2[y] = 0$ feltételt kielégítő megoldása $y_2 \equiv 1$. Mivel $y_1$ és $y_2$ lineárisan függetlenek, azért a kitűzött feladatnak van megoldása. Jelen esetben $p(x) \equiv 1$ és a GREEN-függvényre kirótt követelmények:

$$c_1 t - c_2 = 0; \quad c_1 = 1,$$

vagyis $c_2 = t$. A megoldás tehát:

$$G(x, t) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq t \leqq 1, \\ t, & \text{ha} \quad 0 \leqq t \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

2104. A megoldás módszere szó szerint egyezik az előbbiekkel.

$$G(x, t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} x(1 - t) + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad -1 \leqq t \leqq x \leqq +1, \\ -\frac{1}{2} t(1 - x) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad -1 \leqq x \leqq t \leqq +1; \end{cases}$$

vagy rövidebben:

$$G(x, t) = -\frac{1}{2}[\,|x - t| + xt - 1].$$

**2105.**

$$G(x, t) = \begin{cases} \dfrac{t-x}{2} + \dfrac{1}{4}, & \text{ha } 0 \leqq t \leqq x \leqq 1, \\ \dfrac{x-t}{2} + \dfrac{1}{4}, & \text{ha } 0 \leqq x \leqq t \leqq 1, \end{cases}$$

vagy

$$G(x, t) = -\frac{1}{2} | x - t | + \frac{1}{4}.$$

**2106.** Figyelembe véve azt, hogy $y'' - k^2 y$ differenciálegyenletnek csupán $P_1 = 0$, illetve $P_2 = 0$ peremfeltételt kielégítő megoldása $y_1 = \operatorname{sh} kx$, illetve $y_2 = \operatorname{sh} k(1 - x)$, és ezek lineárisan függetlenek, a keresett GREEN-mag

$$G(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} kx \cdot \operatorname{sh} k(1-t)}{k \operatorname{sh} k}, & \text{ha } x \leqq t, \\ \dfrac{\operatorname{sh} kt \cdot \operatorname{sh} k(1-x)}{k \operatorname{sh} k}, & \text{ha } t \leqq x. \end{cases}$$

**2107.** $L[y] = xy'' + y' = (xy')' = 0; \quad y_1 \equiv 1, y_2 = \ln x$ és $W(y_1, y_2) \neq 0$

$$G(x, t) = \begin{cases} -\ln t, & \text{ha } 0 \leqq x \leqq t \leqq 1, \\ -\ln x, & \text{ha } 0 \leqq t \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

**2108.**

$$G(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{4n}\left[\left(\dfrac{x}{t}\right)^{\frac{n}{2}} - (xt)^{\frac{n}{2}}\right], & \text{ha } 0 < x \leqq t \leqq 1, \\ \dfrac{1}{4n}\left[\left(\dfrac{t}{x}\right)^{\frac{n}{2}} - (xt)^{\frac{n}{2}}\right], & \text{ha } 0 < t \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

**2109.** Az $(1 - x^2) y'' - 2xy' - \dfrac{n^2}{1 - x^2} y = [(1 - x^2) y']' - \dfrac{n^2}{1 - x^2} y = 0$ differenciálegyenletnek csak $P_1$, illetve csupán $P_2$ peremfeltételt kielégítő megoldása

$$y_1 = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{n}{2}} \quad \text{és} \quad y_2 = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

$y_1$ és $y_2$ lineárisan függetlenek lévén,

$$G(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\,\dfrac{1-t}{1+t}\right)^{\frac{n}{2}}, & \text{ha } -1 < x \leqq t < 1, \\ \dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{1+t}{1-t}\,\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{n}{2}}, & \text{ha } -1 < t \leqq x < 1. \end{cases}$$

**2110.** Az $(1-x^2)\,y''-2xy'=[(1-x^2)\,y']'=0$ differenciálegyenlet minden olyan megoldása, mely a peremfeltételek egyikét vagy másikát teljesíti, csakis az $y=$ $=\text{const.}$ függvény, vagyis GREEN-függvény nem létezik. Létezik azonban általánosított GREEN-függvény, melynek meghatározásához oldjuk meg az

$$[(1-x^2)y']'=\frac{1}{2}$$

differenciálegyenletet. Ennek megfelelő megoldásaival

$$\Gamma(x,t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\ln(1-x)\,(1+t)+\ln 2-\dfrac{1}{2}, & \text{ha}\quad x\leqq t,\\[2ex] -\dfrac{1}{2}\ln(1-t)\,(1+x)+\ln 2-\dfrac{1}{2}, & \text{ha}\quad t\leqq x.\end{cases}$$

Az $[(1-x^2)\,y']'+\lambda\,y=0$ differenciálegyenlet azon megoldásai, melyek az $x=\pm 1$ pontokban végesek, akkor és csak akkor léteznek, ha $\lambda=n(n+1)$ $(n=1,2,\ldots)$. E sajátértékek pozitívok, a hozzájuk tartozó sajátfüggvények a $P_n(x)$ LEGENDRE-féle polinomok. A normálás figyelembevételével

$$\Gamma(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)P_n(x)\,P_n(t)}{n(n+1)}.$$

**2111.** Először keressük azt a GREEN-függvényt, mely csupán az $y(0)=y(1)$ feltételhez tartozik. Ilyen persze végtelen sok van, éspedig

$$G(x,t)=\begin{cases}x(t-1)+k, & \text{ha}\quad x\leqq t,\\ t(x-1)+k, & \text{ha}\quad t\leqq x.\end{cases}$$

A tetszőleges $k$ állandót úgy kell kiszámítani, hogy a második peremfeltétel is teljesüljön: rögzített $t$ mellett

$$\int_0^1 G(x,t)\,dx=\int_0^t G(x,t)\,dx+\int_t^1 G(x,t)\,dx=0$$

legyen. $k$-ra adódik ily módon, hogy

$$k=-\frac{t(t-1)}{2},$$

azaz

$$G(x,t)=\begin{cases}x(t-1)-\dfrac{t(t-1)}{2}, & \text{ha}\quad x\leqq t,\\[2ex] t(x-1)-\dfrac{t(t-1)}{2}, & \text{ha}\quad t\leqq x.\end{cases}$$

**2112.**

$$G(x,t)=\begin{cases} x^{1-\alpha}+\dfrac{\alpha-1-h}{h}, & \text{ha } 0<t\leqq x,\\[2mm] t^{1-\alpha}+\dfrac{\alpha-1-h}{h}, & \text{ha } x\leqq t<1.\end{cases}$$

Az $xy''+\alpha y'=\lambda xy$ BESSEL-féle differenciálegyenlettel egyenértékű egyenlet

$$y(x)=\frac{\lambda}{1-\alpha}\int_0^1 t^\alpha\, G(x,t)\, y(t)\, dt.$$

**2113.**

$$G(x,t)=\begin{cases}\ln x-1, & \text{ha } t<x,\\ \ln t-1, & \text{ha } x<t.\end{cases}$$

**2114.** Hogy az $y$ megoldás $w$ szerint periodikus, azt jelenti, hogy

$$y(0)=y(w) \quad \text{és} \quad y'(0)=y'(w).$$

Legyen egyelőre $\lambda=0$. $y''=f(x)$ egyenletnek periodikus megoldása csakis úgy lehet, ha

$$\int_0^w f(x)\, dx=0,$$

mert hiszen éppen ez fejezi ki azt, hogy $y'(0)=y'(w)$. De ha ez teljesül, akkor végtelen sok, a periodicitást jelentő peremfeltételeknek eleget tevő integrál létezik. $y''=0$ differenciálegyenletnek az általános megoldása $y=\alpha\, x+\beta$. Egy partikuláris megoldás, melyre $y(0)=0$, nyilván $y_1=x$, egy másik megoldás, melyre $y(w)=0$: $y_2= = x-w$. Így tehát ezek segítségével $L[y]=y''$-nak a szóban forgó peremfeltételekhez tartozó GREEN-függvénye

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{t}{w}(x-w), & \text{ha } t<x,\\[2mm] \dfrac{x}{w}(t-w), & \text{ha } x<t,\end{cases}$$

tehát az általános tételek szerint a $\lambda=0$-hoz tartozó periodikus megoldások:

$$y=\int_0^w G(x,t)\, f(t)\, dt=C,$$

ahol $C$ tetszőleges állandó.

Tetszőleges $\lambda\neq 0$ paraméterérték mellett tegyük fel, hogy problémánknak van periodikus megoldása. Akkor, egy pillanatra feltételezve azt, hogy differenciálegyenle-

tünk jobb oldala ismert, a most elmondottak szerint a következő két feltételnek kell teljesülnie:

$$\int_0^w [\lambda A(x) y(x) + f(x)]\, dx = \lambda \int_0^w A(x) y(x)\, dx + \int_0^w f(x)\, dx = 0$$

$$y(x) = \int_0^w G(x, t) [\lambda A(t) y(t) + f(t)]\, dt + C.$$

A második egyenletet szorozzuk meg $\lambda A(x)$-szel, és integráljunk, utána vegyük figyelembe az első feltételi egyenletet:

$$\lambda \int_0^w A(x) y(x)\, dx = \lambda^2 \int_0^w \int_0^w A(x) G(x, t) A(t) y(t)\, dx\, dt +$$

$$+ \lambda \int_0^w \int_0^w A(x) G(x, t) f(t)\, dx\, dt + \lambda C \int_0^w A(x)\, dx = -\int_0^w f(x)\, dx.$$

A feltevés alapján $C$ ebből kiszámítható:

$$C = \frac{-1}{\lambda \int_0^w A(x)\, dx} \left\{ \int_0^w f(x)\, dx + \lambda \int_0^w \int_0^w A(x) G(x, t) f(t)\, dx\, dt + \right.$$

$$\left. + \lambda^2 \int_0^w \int_0^w A(x) G(x, t) y(t)\, dx\, dt \right\} = M + \lambda N \int_0^w \int_0^w A(x) G(x, t) A(t) y(t)\, dx\, dt,$$

ahol $M$ és $N$ $y$-tól nem függő állandók. $C$ ezen értékének figyelembevételével

$$y(x) = \lambda \int_0^w G(x, t) A(t) y(t)\, dt + \lambda N \int_0^w \int_0^w A(x) G(x, t) A(t) y(t)\, dx\, dt + F(x) + M =$$

$$= \lambda \int_0^w \left\{ G(x, t) + N \int_0^w A(x) G(x, t)\, dx \right\} A(t) y(t)\, dt + F(x) + M,$$

ahol $F(x) = \int_0^w G(x, t) f(t)\, dt$. Az így kapott kifejezés $y$-ra egy másodfajú FREDHOLM típusú integrálegyenlet, melynek magja:

$$K(x, t) = \left\{ G(x, t) + N \int_0^w A(x) G(x, t)\, dx \right\} A(t).$$

Ha $f \equiv 0$, akkor $M = 0$, és $F \equiv 0$, egyenletünk egy homogén integrálegyenletbe megy át.

**2115.** A húr hosszúsága legyen $l$, mindenkori elongációja $U = U(x, t)$, sűrűsége $\varrho = \varrho(x)$. A választott koordináta-rendszer kezdőpontja legyen a húr egyik végpontjával azonos, az $X$ tengely haladjon át a másik végponton. A rezgésegyenlet:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \varrho(x) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (0 \leqq x \leqq l)$$

Legyen $U(x, t) = y(x)\, z(t)$, akkor fennáll az, hogy

$$\frac{y''(x)}{\varrho(x)\, y(x)} = \frac{z''(t)}{z(t)} = -\lambda,$$

ahol $\lambda$ egyelőre ismeretlen állandó. Figyelembe véve, hogy $U$ a $t$-ben periodikus, adódik, hogy

$$z(t) = A \cos \sqrt{\lambda}\, t + B \sin \sqrt{\lambda}\, t$$

alakú. Megoldandó tehát az

$$y'' + \lambda\, \varrho(x)\, y = 0$$

homogén differenciálegyenlet az $y(0) = y(l) = 0$ peremfeltétel mellett. E probléma GREEN-függvénye (l. a **2102.** példát!)

$$G(x, \tau) = \begin{cases} \dfrac{x(l-\tau)}{l}, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq \tau \leqq l, \\[2ex] \dfrac{\tau(l-x)}{l}, & \text{ha} \quad 0 \leqq \tau \leqq x \leqq l. \end{cases}$$

(2.1.8) alapján problémánk egyenértékű az alábbi homogén integrálegyenlettel:

$$y(x) - \lambda \int_0^l G(x, \tau)\, \varrho(\tau)\, y(\tau)\, d\tau = 0.$$

Egyszerűség kedvéért legyen $l = 1$ és $\varrho(x) = \varrho_0(1 + x)$. ($\varrho_0 > 0$ anyagi állandó), akkor integrálegyenletünk a következő alakot ölti:

$$y(x) - \lambda\, \varrho_0 \int_0^1 G(x, \tau)\ (1 + \tau)\, d\tau = 0.$$

Szorozzuk végig integrálegyenletünket $\sqrt{1+x}$-szel, és vezessük be a $\sqrt{1+x}\; y(x) = \varphi(x)$ új függő változót, akkor erre a következő integrálegyenletet kapjuk:

$$\varphi(x) = \lambda\, \varrho_0 \int_0^1 K(x, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau,$$

ahol

$$K(x, \tau) = \sqrt{1+x}\, G(x, \tau)\, \sqrt{1+\tau}.$$

Az alaphang frekvenciája, vagyis $K(x, \tau)$ legkisebb sajátértéke az 1.7. alatti módszer valamelyikének segítségével határozható meg. Alkalmazzuk például a nyomok módszerét. $K$ szimmetriája miatt

$$A_2 = \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, \tau)\, dx\, d\tau = 2 \int_0^1 \left[ \int_0^x (1 + x)(1 - x)^2 (1 + \tau)\, \tau^2\, d\tau \right] dx = \frac{127}{5040}.$$

Mivel tudjuk, hogy $K$ sajátértékei pozitívok, azért

$$\lambda_1 \varrho \approx \frac{1}{\sqrt{A_2}} \approx 6{,}30,$$

és így

$$\nu_1 = \sqrt{\lambda_1} = \frac{\sqrt{6{,}3}}{\sqrt{\varrho_0}}.$$

**2116.** A választott koordináta-rendszer $X$ tengelye haladjon át a rúd tengelyén, kezdőpontja legyen a rúd egyik végével azonos. A rúd két végpontjára hasson $P$ erő, mely erők a rudat összenyomják. A kihajlott tengely egyenlete, $y = y(x)$ a következő differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$\frac{d}{dx}\left(E p \frac{dy}{dx}\right) + P y = 0.$$

$p$ jelenti a tehetetlenségi nyomatékot az $x$ abszcisszájú keresztmetszeten, $E$ a YOUNG-féle modulus. Miután a rúd végpontjai nem mozdulnak el a rúd tengelyére merőlegesen, azért

$$P_1[y] \equiv y(0) = 0; \quad P_2[y] \equiv y(l) = 0.$$

$l$ jelenti a rúd hosszúságát. Differenciálegyenletünket $E$-vel végigosztva, a

$$\left(p \frac{dy}{dx}\right)' + \lambda y = 0$$

differenciálegyenletre jutunk. Itt $\lambda = \frac{P}{E}$. Jelöljük az

$$L[y] = (p y')'$$

differenciálforma $P_1[y] = P_2[y] = 0$ peremfeltételhez tartozó GREEN-függvényét $G(x, t)$, akkor (2.1.8) alapján $y$ eleget tesz az alábbi homogén integrálegyenletnek:

$$y(x) = \lambda \int_0^l G(x, t)\, y(t)\, dt.$$

Ebből azt a következtetést lehet leolvasni, hogy tetszőleges erő mellett a rúd általában egyensúlyban marad, tengelye nem hajlik ki. Ha ti. $\lambda = \frac{P}{E}$, a $G$ magnak nem sajátértéke, akkor fenti integrálegyenletnek csupán $y \equiv 0$ megoldása létezik, ez esetben

tehát a rúd tengelye nem hajlik ki. Ha viszont $\lambda = \lambda_k$, a $G$ egy sajátértéke, akkor a $P_k = \lambda_k E$ erő hatására a rúd elveszti a stabilitását és kihajlik.

Csonka kúp alakú rúd esetén legyen a kisebbik fedőkör sugara $r_0$, a nagyobbiké pedig $r_0(1+q)$ $(q \geqq 0)$. Akkor az $x$ helyen a tengelyre merőleges sík a csonka kúpból $r = r_0\left(1 + \frac{qx}{l}\right)$ sugarú kört metsz ki. Ezen a helyen a tehetetlenségi nyomaték:

$$p = p(x) \equiv \frac{\gamma r_0^4}{2}\left(1 + \frac{q}{l}x\right)^4.$$

$\gamma$ jelenti a rúd anyagának sűrűségét. Ezeket az adatokat helyettesítsük be $y$-ra vonatkozó differenciálegyenletbe:

$$\left(\frac{\gamma r_0^4}{2}\left(1 + \frac{q}{l}x\right)^4 y'\right)' + \lambda y = 0,$$

vagy $\frac{\gamma r_0^4}{2}$-vel végigosztva, az

$$\left(\left(1 + \frac{q}{l}x\right)^4 y'\right)' + \mu y = 0$$

differenciálegyenletre jutunk, ahol $\mu = \frac{2\lambda}{\gamma r_0^4}$.

Hátra van az

$$L[y] \equiv \left(\left(1 + \frac{q}{l}x\right)^4 y'\right)'$$

differenciálformának az $y(0) = y(l) = 0$ peremfeltételekhez tartozó Green-függvényét meghatározni. $L[y] = 0$ két partikuláris integrálja, melyek csak az első, illetve csak a második peremfeltételt elégítik ki,

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{q}{l}x\right)^3}, \quad \text{illetve} \quad y_2(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{q}{l}x\right)^3} - \frac{1}{(1+q)^3}.$$

Ezek egymástól lineárisan függetlenek, Green-függvény tehát létezik:

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(1+q)^3 l}{3q[(1+q)^3 - 1]}\left[1 - \dfrac{1}{\left(1 + \frac{q}{l}x\right)^3}\right]\left[\dfrac{1}{\left(1 + \frac{q}{l}t\right)^3} - \dfrac{1}{(1+q)^3}\right], \\ \qquad \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq t \leqq l, \\ \dfrac{(1+q)^3 l}{3q[(1+q)^3 - 1]}\left[1 - \dfrac{1}{\left(1 + \frac{q}{l}t\right)^3}\right]\left[\dfrac{1}{\left(1 + \frac{q}{l}x\right)^3} - \dfrac{1}{(1+q)^3}\right], \\ \qquad \text{ha} \quad 0 \leqq t \leqq x \leqq l. \end{cases}$$

Számítsuk ki $G$ első sajátértékének közelítő értékét. $G(x, t)$ szimmetriája miatt

$$A_2 = \int_0^l \int_0^l G(x, t)^2 \, dx \, dt = 2 \int_0^l \left( \int_0^x G^2(x, t) \, dt \right) dx \approx l^4 \left( \frac{1}{90} - \frac{2}{45} q \right),$$

ha egyszerűség kedvéért $q$-nak egynél magasabb hatványát elhagyjuk, ami kis $q$ értékek esetén megengedett. Akkor

$$\mu_1 \approx \frac{1}{l^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{90} - \frac{2}{45} q}}.$$

De $\mu_1 = \frac{2\lambda_1}{\gamma r_0^4}$, tehát $\lambda_1 = \frac{\gamma r_0^4 \mu_1}{2} = \frac{P_1}{E}$,

azaz

$$P_1 = \frac{E}{2} \gamma r_0^4 \mu_1 \approx \frac{E}{2l^2} \gamma r_0^2 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{90} - \frac{2}{45} q}}.$$

Ha $q = 0$, vagyis ha hengeres rúdról van szó, akkor

$$P_1 \approx 9{,}897 \frac{E}{2l^2} \gamma r_0^2.$$

**2117.** A rúd tengelyébe helyezzük a koordináta-rendszer $X$ tengelyét, az $x = 0$ pontban legyen a rúd befogott vége. Az elcsavarodás $\Theta = \Theta(x, t)$ szögre a következő differenciálegyenlet érvényes:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) - I_m \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0.$$

$I_m$ jelenti az egységnyi hosszúságú rúddarabnak a szilárdsági tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát. $K(x)$ a rúd torziószilárdsága. Nyilván

$$\Theta(0, t) = 0 \quad \text{és} \quad \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)_{x=l} = 0.$$

$\Theta(x, t)$ a $t$-ben periodikus, feltehető tehát, hogy

$$\Theta(x, t) = e^{i\nu t} \vartheta(x)$$

alakú. Ezt az előbbi parciális differenciálegyenletbe helyettesítve, a

$$\frac{d}{dx} \left[ K \frac{d\vartheta}{dx} \right] + \nu^2 I_m \vartheta = 0$$

közönséges differenciálegyenletre jutunk, melyet a $\vartheta(0) = \vartheta'(l) = 0$ peremfeltételek mellett kell megoldani. Mivel

$$(K \vartheta')' = 0, \quad \vartheta(0) = \vartheta'(l) = 0$$

problémának csupán a $\vartheta = 0$ függvény tesz eleget, e feladatnak van GREEN-függvénye. A

$$\vartheta_1(x) = \int_0^x \frac{d\tau}{K(\tau)}\,; \quad \vartheta_2(x) \equiv 1$$

partikuláris, lineárisan független integrálokkal képezve a GREEN-függvényt, a következőt kapjuk:

$$G(x, y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{d\tau}{K(\tau)}, & \text{ha } 0 \leqq x \leqq y \leqq l, \\ \displaystyle\int_0^y \frac{d\tau}{K(\tau)}, & \text{ha } 0 \leqq y \leqq x \leqq l. \end{cases}$$

Így $\vartheta(x)$-re adódik ez az integrálegyenlet:

$$\vartheta(x) - \nu^2 \int_0^l G(x, y)\, I_m(y)\, \vartheta(y)\, dy = 0.$$

**2118.** $\dfrac{d^2\nu}{dr^2} = 0$ differenciálegyenletnek csupán az első peremfeltételt kielégítő megoldása például $y_1 = x$, csupán a második peremfeltételt kielégíti az $y_2 = h\,x - (1 + h\,R)$ függvény. $y_1$ és $y_2$ lineárisan függetlenek lévén, feladatunk GREEN-függvénye létezik. Ez:

$$G(r, t) = \begin{cases} \dfrac{h\,r\,t}{1 + hR} - t, & \text{ha } t < r, \\ \dfrac{h\,r\,t}{1 + hR} - r, & \text{ha } r < t. \end{cases}$$

**2201.** $L[u] = \lambda\,\varrho\,u$. Alkalmazzuk (2.2.4) és (2.2.5) ekvivalenciájáról szóló tételt a $\varphi(P) = -\lambda\,\varrho(P)\,u(P)$ függvényre.

**2202.** Legyen $\varphi(P) = \lambda\,\varrho(P)\,u(P) - f(x)$, és alkalmazzuk (2.2.4) és (2.2.5) egyenértékűségéről szóló tételt.

**2203.** $Q(\xi, \eta)$ legyen a körlap egy tetszőleges belső pontja, ennek konjugáltja legyen $Q^*$ $\left(\text{derékszögű koordinátái: } \dfrac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \dfrac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}\right)$. $P(x, y)$ legyen az $\Omega$ körlap egy tetszőleges $Q$-tól különböző pontja. Rögzített $Q$ mellett $\dfrac{1}{2\pi} \ln r$ és $\dfrac{1}{2\pi} \ln r^*$ függvények harmonikusak (kielégítik a körlap minden belső pontjában a $\nabla^2 u = 0$ differenciálegyenletet), tehát különbségük is az. Keressük tehát a GREEN-függvényt $-\dfrac{1}{2\pi} \ln r + \dfrac{1}{2\pi} \ln r^* + \gamma = -\dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{r}{r^*} + \gamma$ alakban. A $P = Q$ pontban előálló

logaritmikus szingularitás megfelel a 2° követelésnek. Másrészt, ha $P$ rajta van $\Omega$-n, akkor $\frac{r}{r^*} =$ állandó $= \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, vagyis $\gamma = \frac{1}{2\pi} \ln (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$, tehát a keresett GREEN-függvény

$$G(P, Q) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{r^*} + \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

E mag sajátfüggvényei kielégítik a

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0$$

differenciálegyenletet és az $u(P) = 0$ peremfeltételt, ahol $P$ az $\Omega$ kör egy pontja. Síkbeli $(\varrho, \vartheta)$ polárkoordinátákat bevezetve, az előbbi differenciálegyenlet a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \lambda u = 0$$

alakot ölti. Oldjuk ezt meg a szokásos $u(\varrho, \vartheta) = f(\varrho)\, g(\vartheta)$ feltevéssel:

$$f''(\varrho)\, g(\vartheta) + \frac{1}{\varrho} f'(\varrho)\, g(\vartheta) + \frac{1}{\varrho^2} f(\varrho)\, g''(\vartheta) + \lambda f(\varrho)\, g(\vartheta) = 0.$$

Ebből

$$\varrho^2 \frac{f''(\varrho)}{f(\varrho)} + \varrho \frac{f'(\varrho)}{f(\varrho)} + \lambda \varrho^2 = -\frac{g''(\vartheta)}{g(\nu)} = \mu^2,$$

mert $g(\vartheta)$ a $\vartheta$-nak $2\pi$ szerint periodikus függvénye. A változók szeparálása tehát a

$$\varrho^2 f'' + \varrho f' + (\lambda \varrho^2 - \mu^2) f = 0$$

differenciálegyenletre vezet. $f(1) = 0$ feltételnek eleget tevő megoldását keressük, mely a 0 pontban korlátos.

Ilyen nem azonosan eltűnő megoldás csak akkor van, ha $\mu = n$ $(n = 0, \pm 1, 2, \ldots)$ és akkor

$$f(\varrho) = I_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\, \varrho),$$

ahol $\lambda_{nk}$ az $I_n(x) = 0$ egyenlet pozitív gyökeit jelenti. Ennek alapján a GR EN-függvény sajátértékei és a hozzájuk tartozó sajátfüggvények:

$$u_{nk}(P) = J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\, \varrho) \cos n\vartheta; \quad u^*_{nk}(P) = J_n(\sqrt{\lambda_{nk}}\, \varrho) \sin n\vartheta$$

$$\lambda = \lambda_{nk}.$$

**2204.** Legyen $f(z)$ analitikus, a körgyűrűben reguláris, a körgyűrű peremén azonosan 1 értékű és valamely belső pontban elsőrendben eltűnő függvény. Akkor

$$G(P, Q) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \ln f(z).$$

Az $f(z)$ megszerkesztésére helyezzük a koordináta-rendszer kezdőpontját a belső kör középpontjába, a hosszúságegység legyen úgy megválasztva, hogy a belső $k_1$ kör sugara $r < 1$, a külső $k_2$ kör sugara $\frac{1}{r}$. A körgyűrű minden $z = x + iy$ pontjához rendeljünk egy $z_1$ pontot úgy, hogy $z z_1 = r^2$ legyen. Ha $z$ a belső $k_1$ kör kerületéhez konvergál, akkor $z_1$ is a kerülethez tart, éspedig $z$ konjugált pontjához. Ezekben a

pontokban $f(z)$ valós. A feltevéseink miatt $f(z)$ konjugált pontokban konjugált komplex értékeket vesz fel. Ezért

$$f(z)\,f(z_1) = f(z)\,f\left(\frac{r^2}{z}\right) = 1,$$

ha $z$ rajta van $k_1$-en. De akkor az analitikus folytatás elve alapján ez a reláció identikusan érvényes minden $z$-re. Hasonló reláció vonatkozik a külső $k_2$ körre is:

$$f(z)\,f\left(\frac{1}{r^2 z}\right) = 1.$$

Követelésünk alapján $f(Q) = 0$. A $Q$-nak megfelelő komplex szám legyen $c$, akkor $f(z)$ elsőrendben tűnik el a

$$c,\ r^{\pm 4}\,c;\quad r^{\pm 8}\,c, \ldots$$

pontokban, és ennek folytán elsőrendű pólusa kell hogy legyen az

$$r^{\pm 2}\,c^{-1};\quad r^{\pm 6}\,c^{-1};\quad r^{\pm 10}\,c^{-1}, \ldots$$

pontokban. Ez azt jelenti, hogy $f(z)$ és

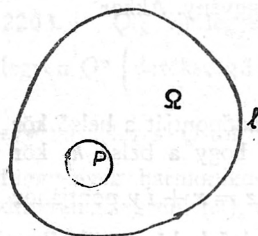
$$F(z) = \left(1 - \frac{z}{c}\right) \frac{\prod\limits_{\nu=i}^{\infty}\left(1 - r^{4\nu}\frac{z}{c}\right)\left(1 - r^{4\nu}\frac{c}{z}\right)}{\prod\limits_{\nu=i}^{\infty}(1 - r^{4\nu-2}\,c\,z)\left(1 - r^{2\nu-2}\frac{1}{c\,z}\right)}$$

függvényeknek közös pólusai és zérushelyei vannak. Közvetlen behelyettesítéssel belátható, hogy

$$F(z)\,F\left(\frac{r^2}{z}\right) = 1 \quad \text{és} \quad F(z)\,F\left(\frac{1}{r^2 z}\right) = \frac{1}{r^2 c}.$$

Ennek alapján

$$f(z) = r^{\frac{1}{2}} z - \frac{\ln c}{\ln r^2}\left(\sqrt{\frac{z}{c}} - \sqrt{\frac{c}{z}}\right) \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - r^{4\nu}\frac{z}{c}\right)\left(1 - r^{4\nu}\frac{c}{z}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1 - r^{4\nu-2}\,c\,z)\left(1 - r^{4\nu-2}\frac{1}{c\,z}\right)}.$$



3. ábra

2205. Mivel $\nabla^2 \ln r = 0$, azért (2.2.3)-ban $a = 1$. Vegyük körül a $P$ pontot — mint középpontot — egy tetszőleges $\varepsilon$ sugarú olyan körrel, mely teljesen $\Omega$-ba esik, és nem tartalmazza a $Q$ pontot. E kör által meghatározott tartományt jelöljük $\Omega_\varepsilon$-nal, magát a körvonalat $l_\varepsilon$-nal. Feladatunk megoldását jelöljük $u$-val. Alkalmazzuk a jól ismert

$$\iint (u\,\nabla^2 v - v\,\nabla^2 u)\,d\Omega = \int\left(u\,\frac{\partial v}{\partial u} - v\,\frac{\partial u}{\partial u}\right) ds$$

GREEN-féle képletet az $\Omega - \Omega_\varepsilon$ tartományra a $v = G(P, Q)$ függvénnyel. Itt ($P$ rögzített pont!) $\nabla^2 G(P, Q) = 0$, és $\nabla^2 u = 0$, lévén a képlet bal oldala nyilván 0, és adódik

$$\int\limits_{l+l_\varepsilon} \left( u \frac{\partial G}{\partial n_Q} - G \frac{\partial u}{\partial n_Q} \right) ds_Q = 0. \quad (*)$$

Másrészt

$$\int\limits_{l+l_\varepsilon} \left( u \frac{\partial G}{\partial u_Q} - G \frac{\partial u}{\partial n_Q} \right) ds_Q = \int\limits_{(l)} \left( u \frac{\partial G}{\partial n_Q} - G \frac{\partial u}{\partial n_Q} \right) ds_Q + \int\limits_{l_\varepsilon} \left( u \frac{\partial G}{\partial n_Q} - G \frac{\partial u}{\partial n_Q} \right) ds_Q.$$

Mivel

$$G(P, Q) = -\frac{1}{2\pi} \ln r_{PQ} + \gamma(P, Q),$$

azért

$$\int\limits_{l_\varepsilon} \left( u \frac{\partial G}{\partial n_Q} - G \frac{\partial u}{\partial n_Q} \right) ds_Q = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{l_\varepsilon} u \frac{\partial \ln r_{PQ}}{\partial n_Q} ds_Q + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{l} u \frac{\partial \gamma(P, Q)}{\partial n_Q} ds_Q +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{l_\varepsilon} \ln r_{PQ} \frac{\partial u}{\partial n_Q} ds - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{l_\varepsilon} \gamma(P, Q) \frac{\partial u}{\partial n_Q} ds_Q. \quad (\substack{**})$$

Mivel $\Omega - \Omega_\varepsilon$ *külső* normálisa, az $l_\varepsilon$ mentén az $\Omega_\varepsilon$ kör középpontja felé mutat, azért

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r},$$

ennek folytán

$$-\frac{1}{2\pi} \int\limits_{l_\varepsilon} u \frac{\partial \ln r_{PQ}}{\partial n_Q} ds_Q = \frac{1}{2\pi\,\varepsilon} \int\limits_{l} u\, ds_Q = u(P),$$

mert $u$ harmonikus függvény, és $r$ a kör mentén állandó értéket vesz fel.

Hasonló okoskodással

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{l_\varepsilon} \ln r_{PQ} \frac{\partial u}{\partial n_Q} ds_Q = -\frac{\ln \varepsilon}{2\pi} \int\limits_{l} \frac{\partial u}{\partial r} ds_Q = 0,$$

ismét csak $u$ harmonikus volta miatt. Megint felhasználva azt, hogy az $u$ és $\gamma$ függvények harmonikusak, állíthatjuk, hogy

$$\left| \int\limits_{l_\varepsilon} u \frac{\partial \gamma}{\partial n_Q} ds_Q \right| \leqq 2\pi\,\varepsilon \max_{l_\varepsilon} \left| u \frac{\partial \gamma}{\partial n_Q} \right| \quad \text{és} \quad \left| \int\limits_{l_\varepsilon} \gamma \frac{\partial u}{\partial n} ds_Q \right| \leqq 2\pi\,\varepsilon \max_{l_\varepsilon} \left| \gamma \frac{\partial u}{\partial n_Q} \right|.$$

Ha tehát $\varepsilon \to 0$, akkor $(\substack{**})$ integrálok összegének határértéke:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{l_\varepsilon} \left( u \frac{\partial G}{\partial n_Q} - G \frac{\partial u}{\partial n_Q} \right) ds_Q = u(P).$$

A GREEN-függvény definíciója alapján $G(l) = 0$ és $u(l) = f(s)$, így (*) a következőt adja:

$$\int_{(l)} f(s) \frac{\partial G}{\partial n_Q} ds + u(P) = 0.$$

2206. Az egységkörre vonatkozó GREEN-függvénybe (2203. példa) vezessünk be polárkoordinátákat: $P(k, \varkappa)$; $Q(l, \lambda)$. Akkor

$$r^2 = l^2 + k^2 - 2l\,k \cos(\varkappa - \lambda); \quad r^{*2} = k^2 + \frac{1}{l^2} - 2\frac{k}{l}\cos(\varkappa - \lambda).$$

Így tehát

$$G(P, Q) = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{r^2}{r^{*2}} - \ln l\right].$$

2207. Az $L[u]$ differenciálegyenletnek az egész gömbön korlátos megoldása csupán $u = \text{const}$ függvény, tehát a kitűzött feladatnak az eredeti értelemben vett GREEN-függvénye nincs. Létezik ellenben általánosított GREEN-függvény. A megadott $\Gamma$ függvény a 2° és 3° feltételeknek eleget tesz, tehát csak azt kell igazolni, hogy

$$L_P[\Gamma] = \frac{1}{4\pi}, \quad (*)$$

mert hiszen $L[u] = 0$ egyenletnek 1-re normált korlátos megoldása $v = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

Ismeretes, hogy $\nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ minden, origó körüli forgatásnál invariáns marad. Írjuk át $\nabla^2 u$-t térbeli polárkoordinátákra, és legyen $r = 1$, akkor ismét $\nabla^2 u = L[u]$-t kapjuk. Ha $Q(0, \varphi)$ a gömb északi pólusa, akkor $\varrho = \vartheta$ lévén,

$$\Gamma = -\frac{1}{2\pi}\ln\left(2\sin\frac{\vartheta}{2}\right).$$

A kijelölt differenciálhányadosok kiszámítása révén igazolható, hogy (*) valóban érvényes. A $\Gamma(P, Q)$ függvény sajátértékei és sajátfüggvényei kiszámítására meghatározandók az

$$L[u] + \lambda u = 0$$

korlátos megoldásai. $u(\vartheta, \varphi)$-t keressük $\Theta(\vartheta)\,\Phi(\varphi)$ alakban. Így $\Theta$-ra a

$$(\sin \nu\, \Theta')' + \left(\lambda \sin\vartheta - \frac{h^2}{\sin\vartheta}\right)\Theta = 0$$

differenciálegyenlet adódik. A $z = \cos\vartheta$, $\Theta(\vartheta) = \zeta(z)$ helyettesítéssel az

$$[(1 - z^2)\zeta^2]' + \left(\lambda - \frac{h^2}{1 - z^2}\right)\zeta = 0$$

egyenletbe megy át. Mivel $\Phi(\varphi)$-re a trigonometrikus függvények adódnak, azért a normált sajátfüggvények, a közismert módon meghatározva:

$$u_{n0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(\cos\vartheta),$$

$$u_{nm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \begin{cases} P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\cos m\varphi \\ P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\sin m\varphi. \end{cases} \quad \begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \dots \\ m = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix}$$

A sajátértékek:

$$\lambda_n = n(n+1)$$

**2208.** Zárjuk ki a $P$ pontokat egy $P$ középpontú $l_\varepsilon$ körrel, melynek $\varepsilon$ sugara olyan kicsiny, hogy $l_\varepsilon$ a tartományban van, és nem tartalmazza a $Q$ pontot. A GREEN-függvény legyen $G(P, Q)$, akkor az $u$ megoldás korlátos volta miatt könnyű — ugyanúgy, mint a **2206.** feladat megoldásánál — megmutatni, hogy

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{l_\varepsilon} \left( u \frac{\partial G}{\partial n_Q} - G \frac{\partial u}{\partial n_Q} \right) ds_Q = u(P).$$

$u$ az $l$ peremen adott $f(s)$ függvény és mivel $G$ a peremen eltűnik

$$\int_{(l)} \left( u \frac{\partial G}{\partial n_Q} - G \frac{\partial u}{\partial n_Q} \right) ds_Q = \int_{(l)} f(s) \frac{\partial G}{\partial n_Q} ds_Q.$$

Másrészt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\Omega - \Omega_\varepsilon} (u \nabla^2 G - G \nabla^2 u)\, d\Omega = - \iint_{\Omega} G \nabla^2 u\, d\Omega_Q,$$

mert $G$ négyzetesen integrálható, és $\nabla^2 G = 0$, tehát a GREEN-formula alapján

$$- \iint_{\Omega} G(P, Q) \nabla^2 u\, d\Omega_Q = u(P) + \int_{(l)} f(s) \frac{\partial G}{\partial n} ds.$$

Mármost a szóban forgó differenciálegyenlet szerint

$$\nabla^2 u = -k^2 u,$$

tehát

$$u(P) - k^2 \iint_{\Omega} G(P, Q)\, u(Q)\, d\Omega = - \int_{(l)} f(s) \frac{\partial G}{\partial n} ds.$$

A szóban forgó DIRICHLET-problémának egyértelmű megoldása tehát akkor és csak akkor van, ha $k^2$ a $G$ magnak nem sajátértéke. Ha $k^2$ a $G$ egyik sajátértékével egyenlő, akkor $u$ kielégíti $\Omega$-ban a

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

differenciálegyenlet és az $u|_{Q \in l}$ peremfeltételt.

**2209.** $\frac{\partial r_{PQ}}{\partial n_Q} = -\cos(r_{PQ}, n_Q).$

**2210.** Az $l$ görbe természetes paraméteres egyenletrendszere legyen

$$x = x(s); \quad y = y(s).$$

A $P$ és $Q$ pontoknak megfelelő paraméterértékek legyenek $s$ és $t$. Egyszerűség kedvéért legyen az $l$ görbe végig sima.

$$r_{PQ} = [x(s) - x(t)]\, \boldsymbol{i} + [x(s) - x(t)]\, \boldsymbol{j}$$

$$n_Q = -y'(a)\, \boldsymbol{i} + x'(t)\, \boldsymbol{j},$$

akkor

$$\cos(r_{PQ}, n_Q) = \frac{-[x(s) - x(t)]\, y'(t) + [y(s) - y(t)]\, x'(t)}{\{[x(s) - x(t)]^2 + [y(s) - y(t)]^2\}^{1/2}}.$$

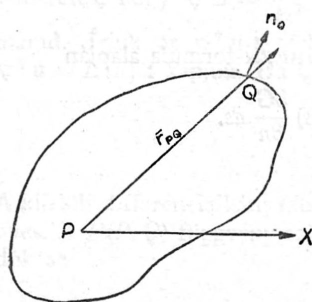
Így tehát

$$K(P, Q) = \frac{\cos(r_{PQ}, n_Q)}{r_Q} = \frac{[y(s) - y(t)]\, x'(t) - [x(s) - y(t)]\, y'(t)}{[x(s) - x(t)]^2 + [y(s) - y(t)]^2}.$$

Ha rögzített $t$ mellett $s \to t$, akkor (l'Hospital-szabály alapján)

$$\lim_{P \to Q} K(P, Q) = \frac{y''(t)\, x'(t) - x''(t)\, y'(t)}{2} = K(Q, Q).$$

Ez éppen az $l$ görbe görbülete a $Q$ pontban.




4. ábra

**2211.** $ds_Q$-nak $r_{PQ}$ vektorra eső merőleges vetülete $ds_Q \cos(r_{PQ}, n_Q)$, ezért az a $dw$ szög, mely alatt $ds_Q$ a $P$ pontból látszik,

$$dw = \frac{ds_Q \cos(r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}} = \frac{dw}{ds_Q}\, ds_Q,$$

tehát

$$\frac{dw}{ds_Q} = \frac{\cos(r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}}.$$

**2212.** A 2211. feladat eredménye alapján

$$\oint_{(l)} \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r_{PQ}}\, ds_Q = \oint_{(l)} \frac{dw}{ds_Q}\, ds_Q = \oint_{(l)} dw = \begin{cases} 2\pi \\ \pi \\ 0 \end{cases}$$

aszerint, hogy $P$ a tartomány belsejében, a kontúrgörbén vagy a tartományon kívül van.

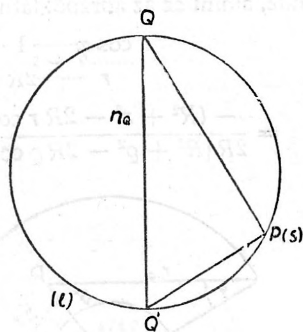
**2213.** Mivel

$$w = \operatorname{arc\,tg} \frac{y(s) - y(t)}{x(s) - x(t)},$$

az állítás a 2212. példa eredménye alapján nyilvánvaló.

2214. A keresett harmonikus függvényt kettős réteg potenciáljaként keressük. E feltevésből adódó integrálegyenlet magja

$$K(P, Q) = \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r_{PQ}} = \frac{\cos (r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}} = \frac{1}{2R},$$



5. ábra

maga az integrálegyenlet

$$\mu(s) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{(l)} \frac{1}{2R} \mu(t)\, dt = \frac{1}{\pi} f(s).$$

Így tehát

$$\mu(s) = \frac{1}{\pi} f(s) + a$$

alakú. Ezt az egyenletbe visszahelyettesítve:

$$\frac{1}{\pi} f(s) + a + \frac{1}{\pi} \frac{1}{2R} \int\limits_{(l)} \frac{1}{\pi} f(s)\, ds + \frac{1}{\pi} \frac{a}{2R} \int\limits_{(l)} ds = \frac{1}{\pi} f(s).$$

Ebből

$$a = -\frac{1}{4\pi^2 R} \int\limits_{(l)} f(s)\, ds.$$

A kettős réteg sűrűsége tehát

$$\frac{1}{\pi} f(s) - \frac{1}{4\pi^2 R} \int\limits_{(l)} f(s)\, ds.$$

A DIRICHLET-feladat megoldása pedig

$$W(P) = \int\limits_{(l)} \frac{\cos (r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}} \left[ \frac{1}{\pi} f(Q) - \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{(l)} f(s)\, ds \right] ds_Q.$$

Ha a $P$ pont a körön belül fekszik, így a kifejezés egyszerűbb alakra hozható:

$$W(P) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{(l)} \frac{\cos (r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}} f(Q)\, ds_Q - \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{(l)} f(s)\, ds \int\limits_{(l)} \frac{\cos (r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}} ds =$$

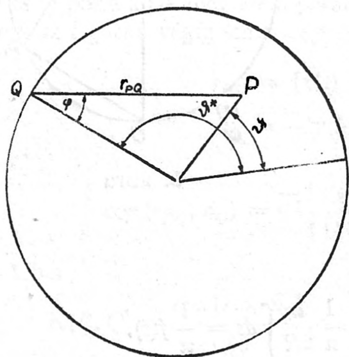
$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{(l)} \frac{\cos (r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}} f(s_Q)\, ds_Q - \frac{1}{2\pi R^2} \int\limits_{(l)} f(s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{(l)} \left( \frac{\cos (r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}} - \frac{1}{2R} \right) f(s_Q)\, ds_Q.$$

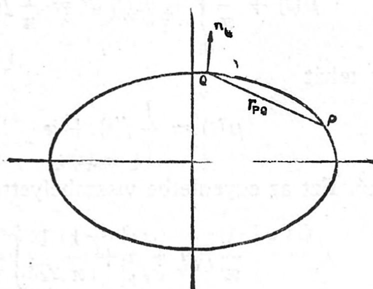
Ámde, amint ez az ábrából látható, ha az $r_{PQ} = r$ és $(r_{PQ}, n_Q) = \varphi$ jelölést használjuk:

$$\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{2R} = \frac{2R\cos\varphi - 1}{2R\,r} = \frac{2R\,r\cos\varphi\, r^3}{2R\,r^2} =$$

$$= \frac{-(R^2 + r^2 - 2R\,r\cos\varphi) + R^2}{2R\,[R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho\cos(\vartheta - \vartheta^*)]} = \frac{R^2 - \varrho^2}{2R\,[R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho\cos(\vartheta - \vartheta^*)]},$$




6. ábra




7. ábra

ahol $\overline{OP} = \varrho$. Így tehát $s_Q$ helyett $\vartheta^*$ integrációs változót bevezetve, kapjuk, hogy

$$W(P) = W(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \varrho^2}{R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho\cos(\vartheta - \vartheta^*)} f(\vartheta^*)\, d\vartheta^*.$$

(Poisson-integrál).

**2215.** A keresett harmonikus függvényt ismét kettős réteg alakjában keressük. Állapítsuk meg ez esetben a kettős réteg sűrűségére vonatkozó másodfajú integrálegyenlet magját.

Az ellipszis egyenletrendszere

$$x = a\cos t; \qquad y = b\sin t. \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

A $P$ pont tartozzék az $s$, a $Q$ pedig a $t$ paraméterértékhez:

$$r_{PQ} = a^2(\cos s - \cos t)^2 + b^2(\sin s - \sin t)^2 = 4a^2\sin^2\frac{s-t}{2}\left(1 - \varepsilon^2\cos\frac{s+t}{2}\right),$$

ahol $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ (az ellipszis exentricitása), és

$$\cos(n_Q, r_{PQ})\, ds_Q = \cos(n_Q, r_{PQ})\, dt =$$

$$= [\cos(n_Q, x)\cos(r_{PQ}, x) + \cos(n_Q\, y)\cos(r_{PQ}, y)]\, dt =$$

$$= \frac{1}{r_{PQ}}[a(\cos s - \cos t)\, dy - b(\sin s - \sin t)\, dx] =$$

$$= \frac{ab}{r_{PQ}}[\cos t(\cos s - \cos t) + \sin t(\sin s - \sin t)]\, dt = -\frac{2\,ab}{r_{PQ}}\sin^2\frac{s-t}{2}\, dt.$$

Így tehát

$$\frac{\cos(n_Q, r_{PQ})}{r_{PQ}} ds_Q = -\frac{b}{2a} \frac{dt}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{s+t}{2}}.$$

Fejtsük FOURIER-sorba a második tényezőben szereplő

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \vartheta}$$

függvényt:

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \vartheta} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} e^{2ik\vartheta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} e^{-2ik\vartheta},$$

ahol

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \vartheta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

$$\frac{a_k}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{2ik\vartheta}\, d\vartheta}{1 - \varepsilon \cos^2 \vartheta}. \quad (k \geqq 1)$$

Ez utóbbi integrál kiszámítása érdekében vezessük be a $z = e^{i\vartheta}$ helyettesítést:

$$\frac{a_n}{2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(k)} \frac{4z^{n+1}\, dz}{4z^2 - \varepsilon(z^2 + 1)}.$$

$k$ jelenti a $|z| = 1$ kört. Az integrandusz pólusai

$$z_1 = \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}; \quad z_2 = -\frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

a $k$-n belül fekszenek, a hozzájuk tartozó reziduumok

$$\frac{\varepsilon^{2n}}{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}\,(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})^{2n}}.$$

Ebből adódik, hogy

$$a_n = \frac{2\varepsilon^{2n}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}\,(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})^{2n}} \quad (n \geqq 1)$$

A sorfejtés tehát ilyen alakúvá vált:

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \vartheta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}\right)^{2n} \cos 2n\vartheta\right].$$

$\theta = \dfrac{s+t}{2}$ helyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{1-\varepsilon^2\cos^2\dfrac{s+t}{2}} = \frac{a}{b}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2n}(\cos n\,s\cos n\,t - \sin n\,s\sin n\,t)\right].$$

$c$ jelenti az ellipszis fókusztávolságának felét. Megoldandó integrálegyenletünk tehát a következő alakú:

$$\mu(s) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2n}\cos n\,s\int_0^{2\pi}\mu(t)\cos n\,t\,dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2n}\sin n\,s\int_0^{2\pi}\mu(t)\sin n\,t\,dt = f(s).$$

Legyen

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(t)\,dt;\quad A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(t)\cos n\,t\,dt;\quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(t)\sin n\,t\,dt,$$

akkor egyenletünk megoldása a következő alakú:

$$\mu(s) = f(s) - A_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^{2n}(A_n\cos n\,s - B_n\sin n\,s).$$

Ha most ezt az egyenletet $\dfrac{1}{2\pi}$, $\dfrac{\cos n\,s}{\pi}$, $\dfrac{\sin n\,s}{\pi}$-vel végigszorozzuk és integrálunk, megkapjuk a $\mu$ függvény FOURIER-együtthatóit:

$$A_0 = \frac{1}{2}F_0,\quad A_n = \frac{(a+b)^n}{(a+b)^n + (a-b)^n}F_n,\quad B_n = \frac{(a+b)^n}{(a+b)^n - (a-b)^n}G_n,$$

ahol $F_0$, $F_n$, $G_n$ az $f$ függvény FOURIER-együtthatóit jelentik.

**2216.** Tekintsük a belső DIRICHLET-feladatot. Felhasználva (2.2.18)-at, $F(z)$ határértéke

$$F_b(t) = \frac{-1}{2}\mu(t) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{(l)}\frac{\mu(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta.$$

Ennek vegyük a valós részét, és jegyezzük meg, hogy $\operatorname{Re} F_b(t) = u(t)$ az $l$ peremen adott függvény:

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\oint_{(l)}\frac{\mu(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta = 2u(t),$$

vagy

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \oint_{(l)} \mu(\zeta) \operatorname{Im} \frac{d\zeta}{\xi - t} = 2u(t). \qquad (*)$$

Legyen $\zeta - t = r e^{i\theta}$. Akkor

$$\operatorname{Im} \frac{d\zeta}{\zeta - t} = \operatorname{Im} [d \ln (\zeta - t)] = d\theta = \frac{d\theta}{ds} ds,$$

ahol $ds$ az $l$ íveleme. A CAUCHY—RIEMANN-egyenletek alapján

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial \ln r}{\partial n} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n}$$

$n$ jelenti a külső normálist). Ha az $r$ rádiuszvektort $\zeta$-tól $t$ felé irányítjuk, akkor

$$\frac{\partial r}{\partial n} = - \cos (r, n),$$

tehát

$$\operatorname{Im} \frac{d\zeta}{\zeta - t} = - \frac{\cos (r, n)}{r} ds.$$

Ennélfogva (*) a következő egyenletbe megy át:

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi} \oint_{(l)} \frac{\cos (r, n)}{r} \mu(t)\, ds = 2u(t).$$

**2301.** Ismételjük meg a **2203.** feladat kapcsán követett gondolatmenetet. A (2.3.1) formula figyelembevételével a keresett GREEN-függvény

$$G(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{PQ}} - \frac{R}{4\pi \varrho \cdot \overline{OR}}.$$

$\varrho$ jelenti a $P(x, y, z)$ pontnak a

$$Q^* \left( \frac{\xi R^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \frac{\eta R^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \frac{\zeta R^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \right)$$

ponttól mért távolságát.

**2302.** Vegyük körül a $P$ pontot egy $\varepsilon$ sugarú gömbbel, mely teljesen $\Omega$ belsejében van, és mely nem zárja magába a $Q$ pontot. A $\Gamma_\varepsilon$ gömb által létrehozott tartomány legyen $\Omega_\varepsilon$. Alkalmazzuk a

$$\iiint (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u)\, dv = \iint \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) df \qquad (*)$$

GREEN-féle képletet az $\Omega - \Omega_\varepsilon$ tartományra, és $u$ legyen a szóban forgó függvény, $v$ pedig $\equiv G(P, Q)$ (rögzített $P$ mellett). Mivel $\Omega - \Omega_\varepsilon$-ben $\nabla^2 G \equiv 0$, $\nabla^2 u = 0$, ezért (*) bal oldala nyilván 0, és így

$$\iint\limits_{\Gamma - \Sigma_\varepsilon} \left( u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) df = \iint\limits_{\Sigma} \left( u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) df + \iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} \left( u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) df = 0.$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$G(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{PQ}} + \gamma,$$

ezért

$$\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} \left( u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) df = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} \left( u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{PQ}} - \frac{1}{r_{PQ}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) df + \iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} \left( u \frac{\partial \gamma}{\partial n} - \gamma \frac{\partial u}{\partial n} \right) df. \qquad (\ast\ast)$$

Itt $n$ a $\Sigma + \Gamma_\varepsilon$ külső normálisát jelenti, ez $\Gamma_\varepsilon$ befelé mutató normálisa, ezért

$$\frac{\partial}{\partial u} = - \frac{\partial}{\partial r},$$

és ennélfogva

$$\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{PQ}} df = \frac{1}{4\pi \varepsilon^2} \iint u \, df = u(P),$$

az $u$ harmonikus volta miatt. Ugyanígy

$$\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r_{PQ}} \frac{\partial u}{\partial n} df = \frac{1}{\varepsilon} \iint \frac{\partial u}{\partial n} df = 0.$$

Mivel $\gamma$ korlátos, harmonikus függvény, ezért $(\ast\ast)$ jobb oldalán álló második intengrál határértéke 0, ha $\varepsilon \to 0$. Másrészt

$$\iint\limits_{\Sigma} G(P, Q) \frac{\partial u}{\partial n} df_Q = 0,$$

így tehát képletünk igazolást nyert.

**2303.** A **2302.** alapján csupán $\dfrac{\partial G}{\partial n}$-et kell kiszámítani, ahol $G$ a **2301.** feladatban szereplő GREEN-függvény.

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{PQ}} - \frac{1}{\overline{OQ}} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\varrho} \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{PQ}} = \frac{\partial}{\partial r_{PQ}} \frac{1}{r_{PQ}} \frac{\partial r_{PQ}}{\partial n} = - \frac{1}{r_{PQ}^2} \cos (r_{PQ}, n),$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\varrho} = \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial n} = - \frac{1}{\varrho^2} \cos (\varrho, n).$$

Másrészt

$$\cos(r_{PQ}, n) = \frac{1 + r_{PQ}^2 - \overline{OQ}^2}{2r_{PQ}}; \quad \cos(\varrho, n) = \frac{1 + \varrho^2 - \overline{Q^*Q}^2}{2\varrho}.$$

Felhasználva azt, hogy

$$\frac{r_{PQ}}{\varrho} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{QQ^*}},$$

az adódik, hogy

$$\cos(\varrho, n) = \frac{\overline{OQ}^2 + r_{PQ}^2 - 1}{2\overline{OQ}^2 r_{PQ}}.$$

E kifejezések felhasználásával adódik, hogy a gömbfelületen

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1 - \overline{OQ}^2}{r_{PQ}^3},$$

vagyis

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{(\Gamma)} \frac{1 - \overline{OQ}^2}{r_{PQ}^3} f(Q)\, df_Q.$$

Ha áttérünk gömbi koordinátákra, és figyelembe vesszük $G$ szimmetriáját, akkor $[P(r, \vartheta, \varphi),\ Q(1, \vartheta', \varphi')]$

$$u(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - r^2}{(1 - 2r\cos\gamma + r^2)^{3/2}} f(\vartheta', \varphi')\, d\vartheta'\, d\varphi',$$

ahol $\cos\gamma = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi - \varphi')$. (Gömbre vonatkozó Poisson-integrál.)

2304. Ha az $F$ felületen adott függvény $f(P)$, akkor (2.3.11) alapján az ismeretlen $\sigma(Q)$ felületi sűrűségre nézve fennáll a

$$\sigma(P) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_F \frac{\cos(r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}^2} \sigma(Q)\, df_Q = 2f(P)$$

Fredholm-típusú integrálegyenlet. Csak azt kell igazolni, hogy a

$$K(P, Q) = \frac{\cos(r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}^2} \qquad (P, Q \in F)$$

magnak $\lambda = -\frac{1}{2\pi}$ nem sajátértéke. Mert ha $-\frac{1}{2\pi}$ sajátérték lenne, akkor léteznék olyan $\sigma_h(P)$ függvény $\left(\int\limits_F \sigma_h(P)^2\, df_P = 1\right)$, melyre

$$\sigma_h(P) + \frac{1}{4\pi} \int\limits_F \frac{\cos(r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}^2} \sigma_h(Q)\, df_Q \equiv 0$$

lenne és a

$$W_h(P) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_F \frac{\partial \frac{1}{r_{PQ}}}{\partial n_Q} \sigma_h(Q)\, df_Q.$$

harmonikus függvénynek határértéke a felületi $P$ pontban $O$ lenne, ha belülről közelítjük meg a $P$ pontot (2.3.11). De akkor az $F$ által határolt $\Omega$ tartományon belül $W_h \equiv 0$ (a DIRICHLET-feladat unicitása miatt). De

$$\frac{\partial W_h}{\partial n_b} = \frac{\partial W_h}{\partial n_k} = 0,$$

így $W_h$ az $\Omega$-n kívül állandó (a NEUMANN-feladat unicitási tétele alapján). Mivel pedig $\lim W_h = 0$, ha $P \to \infty$, ezért $W_h \equiv 0$ mindenütt. A (2.3.11) és (2.3.12) formulák miatt

$$\sigma_h(P) = W_{hb}(P) - W_{hk}(P) = 0.$$

Vagyis $-\frac{1}{2\pi}$ nem sajátérték.

**2305.** Ismert GAUSS-féle tétel szerint

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_F \frac{\cos(r_{PQ}, n_P)}{r_{PQ}^2}\, df_Q \equiv 1,$$

amiből (2.3.12) alapján az állítás azonnal következik. Ugyancsak (2.3.12) formulából az is következik, hogy e magnak más sajátfüggvénye, mely $\frac{1}{2\pi}$-hez tartozik, nincs is.

**2306.** A koordináta-rendszer 0 kezdőpontja legyen a felületen belül. Az $F$ felületen megadott függvény legyen $f(P)$, $z(P)$ a felületen kívül harmonikus. (2.3.12) szerint $\sigma$-ra fennáll ez a FREDHOLM-típusú integrálegyenlet:

$$\sigma(P) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_F \frac{\cos(r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}^2} \sigma(Q)\, df_Q + \frac{1}{R} \int\limits_F \sigma(Q)\, df_Q = -2f(P). \qquad (P \in F)$$

Ennek az egyenletnek egy és csakis egy megoldása van, ha a megfelelő homogén

$$\sigma_h(P) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_F \frac{\cos(r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}^2} \sigma_h(Q)\, df_Q + \frac{1}{R} \int\limits_F \sigma_h(Q)\, df_Q = 0 \qquad (*)$$

egyenletnek csak triviális megoldása van (a FREDHOLM-féle alternatívatétel alapján). $F$-en kívüli térrész legyen $\bar{\Omega}$, akkor (*) fennállása azt mutatja, hogy

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_F \frac{\partial \frac{1}{r_{PQ}}}{\partial n_Q} \sigma_h(Q)\, df_Q \equiv \frac{1}{2R} \int\limits_F \sigma_h(Q)\, df_Q,$$

ha $P \in \bar{\Omega}$, így

$$\int_F \sigma_h(Q)\, df_Q = \frac{1}{2\pi} \int_F R \frac{\partial \frac{1}{r_{PQ}}}{\partial n_Q} \sigma_h(Q)\, df_Q.$$

Ha most $R \to \infty$ $\left( \text{akkor } R \frac{\partial \frac{1}{r_{PQ}}}{\partial n_Q} \to 0 \right)$, akkor

$$\int_F \sigma_h(Q)\, df_Q = 0, \qquad (\overset{*}{*})$$

vagyis (*)-ban az utolsó tag eltűnik. **2305.** feladat alapján $\sigma_h = \text{const}$, ez viszont $(\overset{*}{*})$ miatt zérus.

**2307.** Ha kettős réteg potenciáljaként keressük a külső DIRICHLET-feladat megoldását, akkor a

$$\sigma(P) - \frac{1}{2\pi} \int_{(F)} \frac{\cos(r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}^2} \sigma(Q)\, df_Q = -2f(P)$$

integrálegyenletre jutunk. Mivel $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ a mag sajátértéke, azért ennek az inhomogén integrálegyenletnek — általában — tetszőleges $f(P)$ mellett nincs megoldása (l. a **2305.** feladatot !).

**2308.** A (2.3.9) formula alapján a külső NEUMANN-feladat — ha a harmonikus függvényt egyszerű réteg potenciáljaként keressük — a

$$\varrho(P) + \frac{1}{2\pi} \int_F \frac{\cos(r_{PQ}, n_P)}{r_{PQ}^2} \varrho(Q)\, df_Q = 2f(P) \qquad (P \in F)$$

inhomogén FREDHOLM-típusú integrálegyenletre vezet. Ennek magja a **2304.** feladatban szereplő integrálegyenlet magjának az adjungáltja. Mivel $\lambda = -\frac{1}{2\pi}$ a most említett egyenletnek nem sajátértéke a **2304.** feladat szerint, így nem sajátértéke a mi egyenletünknek sem, tehát bármely $f$ mellett integrálegyenletünknek egy és csakis egy megoldása van.

**2309.** Ha a belső NEUMANN-feladatot egyszerű réteg potenciáljaként keressük, akkor a (2.3.8) szerint a

$$\varrho(P) - \frac{1}{2\pi} \int_F \frac{\cos(r_{PQ}, n_P)}{r_{PQ}^2} \varrho(Q)\, df_Q = -2f(P)$$

inhomogén integrálegyenletre jutunk. Ennek magja a **2307.** feladatban szereplő integrálegyenlet magjának adjungáltja, ennek a magnak $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ sajátértékhez tartozó

egyetlen sajátfüggvénye $\varphi \equiv$ const. FREDHOLM ismert tétele alapján tehát egyenletünknek akkor és csak akkor van megoldása, ha

$$\int_{(F)} f(P)\, df_P = 0.$$

**2401.** A keresett görbepálya egyenlete legyen $x = x(z)$, az ívelem

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\, dz = \varphi(z)\, dz,$$

ahol

$$\varphi(z) = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}.$$


8. ábra

Az energiatörvény szerint

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_\zeta = \sqrt{2g\,(z - \zeta)},$$

így

$$t = f(z) = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{2g(z-\zeta)}} = \int_0^z \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\sqrt{2g(z-\zeta)}}.$$

Ez $\varphi(\zeta)$-ra egy ABEL-típusú integrálegyenlet, melynek megoldása (2.4.2) alapján

$$\varphi(z) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\sqrt{z - \zeta}}.$$

**2402.** A (*) alatti integrálegyenletet szorozzuk meg $(z - x)^{-\frac{1}{2}}$-nel, és tagonként integráljunk 0-tól $z$-ig. A bal oldalt alakítsuk át oly módon, hogy az ott fellépő integrálokra alkalmazzuk a parciális integrálás elvét.

**2403.** Az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg $(z - x)^\mu$ függvénnyel $(\mu > -1)$, és integráljunk 0-tól $z$-ig. A jobb oldalt alakítsuk át az $x = \varrho\, z$ helyettesítéssel:

$$\int_0^z x^\lambda (z - x)^\mu\, dx = z^{\lambda+\mu+1} \int_0^1 \varrho^\lambda (1 - \varrho)^\mu\, d\varrho =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu + 1)\, \Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + \mu + 2)} z^{\lambda+\mu+1}. \quad (\lambda + \mu + 1 > \lambda \geqq 0)$$

A bal oldalon cseréljük fel az integrálások sorrendjét, és a belső integrált az $x = y + \varrho\,(z - y)$ helyettesítés segítségével számítsuk ki. Ilyen módon a

$$\frac{\Gamma(\beta + 1)\, \Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\beta + \mu + 2)} \int_0^z (z - y)^{\mu+\beta+1} \varphi(y)\, dy = \frac{\Gamma(\mu + 1)\, \Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + \mu + 1)} z^{\lambda+\mu+2}$$

egyenletre jutunk. $\mu$-t válasszuk úgy, hogy

$$\mu + \beta + 1 = n$$

természetes egész legyen ($\beta < n$). Ezáltal előbbi egyenletünk az

$$\int_0^z \frac{(z-y)^n}{n!} \varphi(y)\, dy = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\lambda-\beta+n+1)} z^{\lambda+n-\beta}$$

alakot ölti. Ha ezt $z$ szerint $(n+1)$-szer differenciáljuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\varphi(z) = \frac{\Gamma(\lambda+1)(\lambda+n-\beta)\ldots(\lambda-\beta)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda-\beta-1} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\lambda-\beta)} z^{\lambda-\beta-1},$$

ha $\lambda - \beta + k \neq 0$ és $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Ha $\lambda - \beta - 1$ negatív egész, akkor $\varphi \equiv 0$, ez esetben egyenletünknek más megoldása nincs is. Igazoljuk, hogy az imént kapott $\varphi(z)$ függvény integrálegyenletünknek valóban megoldása!

**2404.** Oldjuk meg először az

$$\int_0^x (x-y)^\beta \varphi_i(y)\, dy = a_i x^{\lambda_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ntegrálegyenleteket a **2403.** feladat szerint. A megoldás:

$$\varphi = \varphi_1(y) + \varphi_2(y) + \ldots + \varphi_n(y).$$

Ez az eljárás természetesen akkor is alkalmazható, ha $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{\lambda_i}$ és $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(y)$ sor egyenletesen konvergens.

**2406.** Legyen

$$L(t) = \frac{B_0}{\pi(-\alpha)} t^{-\alpha} + \frac{B_1}{\pi(1-\alpha)} t^{1-\alpha} + \ldots + \frac{B_n}{\pi(n-\alpha)} t^{n-\alpha} + \ldots$$

alakú függvény, melynek együtthatóiról később diszponálunk. Szorozzuk végig egyenletünket $L(z-x)$-szel, és integráljunk 0-tól $z$-ig:

$$\int_0^z L(z-x) \int_0^x K(x-y)\,\varphi(y)\, dy\, dx = \int_0^z L(z-x)\, f(x)\, dx.$$

A bal oldalon a következő alakú tagok szerepelnek

$$\int_0^z \frac{(z-x)^{n-\alpha}}{\pi(n-\alpha)} \int_0^x \frac{(x-y)^{\alpha+m-1}}{\pi(\alpha+m-1)} \varphi(y)\, dy = \int_0^z \left[\int_y^z \frac{(z-x)^{n-\alpha}\,(x-y)^{\alpha+m-1}}{\pi(n-\alpha)\,\pi(\alpha+m-1)} dx\right] \varphi(y)\, dy.$$

Vegyük tekintetbe azt, hogy $x = y + \varrho(z - y)$ helyettesítéssel

$$\int_y^z (z-x)^{n-\alpha}(x-y)^{\alpha+m-1}\,dx = (z-y)^{m+n}\int_0^1 \varrho^{\alpha+m-1}(1-\varrho)^{n-\alpha}\,d\varrho =$$

$$= \frac{\pi(\alpha+m-1)\,\pi(n-\alpha)}{\pi(m+n)}(z-y)^{n+m}.$$

Ezért

$$\int_0^z L(z-x)\,f(x)\,dx = \int_0^z \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n B_m}{\pi(n+m)}(z-y)^{n+m}\varphi(y)\,dy.$$

Válasszuk most már a $B_i$ együtthatókat úgy, hogy $\varphi$ együtthatója $\equiv 1$ legyen, vagyis érvényesek legyenek az

$$A_0 B_0 = 1$$
$$A_0 B_1 + A_1 B_0 = 0$$
$$A_0 B_2 + A_1 B_1 + A_2 B_0 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

egyenletek. Ezekből a $B_i$-k meghatározása után

$$\int_0^z \varphi(y)\,dy = \int_0^z L(z-x)\,f(x)\,dx,$$

azaz

$$\varphi(z) = \frac{d}{dz}\int_0^z L(z-x)\,f(x)\,dx = L(z)\,f(0) + \int_0^z L(z-x)\,f'(x)\,dx$$

(feltéve persze, hogy $L(t)$-re vonatkozó sor konvergens).

**2408.** Jelöljük a **2407.** feladatban szereplő egyenlet megoldását $\mu(t)$-vel. Egyenletünk mindkét oldalát $\mu(z-x)$-szel szorozzuk végig, és integráljunk $x$ szerint:

$$\int_0^z \mu(z-x)\left[\int_0^x [\ln(x-y) - c]\,\varphi(y)\,dy\right]dx =$$

$$= \int_0^z\left[\int_y^z [\ln(x-y) - c]\,\mu(z-x)\,dx\right]\varphi(y)\,dy = \int_0^z f(x)\,\mu(z-x)\,dx.$$

$\mu$ jelentése miatt az egyenlet bal oldalán álló szögletes zárójelben levő integrál $(y-z)$-vel egyenlő, azért

$$\varphi(y) = -\frac{d^2}{dy^2}\int_0^y \mu(y-x)\,f(x)\,dx.$$

**2501.** A definíció szerint

$$\mathcal{C}f = \frac{-1}{4\pi} \oint_l \left( \oint_l \frac{d\tau}{(\zeta - \tau)(\tau - t)} \right) f(\zeta)\, d\zeta$$

De

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{d\tau}{(\zeta - \tau)(\tau - t)} = \frac{1}{\zeta - \tau} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{d\tau}{\tau - \zeta} \right].$$

Alkalmazzuk a 2. tétel (2.5.2) formuláját az $f(\zeta) \equiv 1$ függvényre. Ekkor $F(z) \equiv 1$, ennélfogva az előbbiek szerint

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{d\tau}{\tau - \zeta}; \quad \text{vagyis} \quad \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\tau}{\tau - \zeta} = \frac{1}{2}.$$

Hasonló okok miatt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{2}$$

és így

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{d\tau}{(\xi - \tau)(\tau - t)} = 0.$$

**2502.** A kitűzött

$$(a\mathcal{E} + b\mathcal{H})\,\varphi = f$$

integrálegyenlet mindkét oldalára alkalmazzuk az $a\mathcal{E} - b\mathcal{H}$ operátort, és használjuk fel a (2.4.5) alatti eredményt. Ily módon a

$$\varphi(x) = \frac{1}{a^2 + b^2} F(x) + \lambda \tag{*}$$

eredményhez jutunk, ahol

$$F(x) = a\, f(x) - \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{cotg} \frac{y - x}{2} f(y)\, dy; \quad \lambda = \int_0^{2\pi} f(x)\, dx.$$

Ha tehát egyenletünknek egyáltalában van megoldása, az nem lehet más, mint a (*) alatti függvény. Ez valóban ki is elégíti az egyenletet, erről az egyenletbe való visszahelyettesítéssel győződhetünk meg.

**2503.** Ha $\lambda \neq \pm i$, akkor alkalmazzuk a kitűzött

$$(\mathcal{E} - \lambda \mathcal{H})\, \varphi = 0$$

integrálegyenletre az $\mathcal{E} + \lambda \mathcal{H}$ operátort, és vegyük figyelembe a (2.5.5) alatti eredményt. Ezáltal a megoldó függvényre azt kapjuk, hogy az nem lehet más, mint a

$$\varphi(x) \equiv C \quad (C = \text{const})$$

függvény. Ha ezt a megoldandó egyenletbe visszahelyettesítjük, akkor a $C = 0$ megállapításhoz jutunk. Ha azonban $\lambda = \pm i$, akkor egyenletünket kielégíti minden olyan függvény, melyre

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)\, dx = 0$$

**2504.** $\varphi(x) \equiv 1.$

**2505.** A $\mathcal{H}\varphi = f$ egyenlet mindkét oldalára alkalmazzuk a $\mathcal{H}$ operátort, akkor (2.5.5) alapján azt kapjuk, hogy egyenletünk megoldása csakis akkor létezik, ha

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0.$$

Ha ez teljesül, egyenletünk egyetlen megoldása: $\varphi = -\mathcal{H}f + C$, ahol $C$ tetszőleges állandó.

**2506.** A kitűzött

$$(a\,\mathcal{E} + b\,\mathcal{H} + \mathcal{K})\,\varphi = f$$

integrálegyenlet mindkét oldalára alkalmazzuk az $a\mathcal{E} - b\mathcal{H}$ operátort. Ezáltal a

$$\varphi(x) - \frac{1}{a^2 + b^2}(a\,\mathcal{E} - b\,\mathcal{H})\,\mathcal{K}\,\varphi = \frac{1}{a^2 + b^2}F(x) + \lambda \qquad (*)$$

egyenletre jutunk, ahol $\lambda$ állandó, $F(x) = (a\,\mathcal{E} - b\,\mathcal{H})\,f$. A (*) alatti egyenlet egy FREDHOLM-típusú integrálegyenlet, melynek megoldásában (ha ilyen létezik) szerepel a $\lambda$ paraméter. (*) megoldását az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve, mód van $\lambda$-t úgy megválasztani, hogy egyenletünket kielégítő függvényt kapjunk.

**2507.**

$$(3\mathcal{E} - \mathcal{H})(3\mathcal{E} + \mathcal{H})\,\varphi + \frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(x)\,\varphi(x)\, dx = 3,$$

vagyis

$$10\,\varphi(x) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [3\,w(t) - 1]\,\varphi(t)\, dt = 3.$$

Ha tehát van megoldása, az csakis

$$\varphi \equiv C \qquad (C = \text{const})$$

függvény lehet. Ha

$$C = \frac{2\pi}{6\pi + \int_0^{2\pi} w(t)\, dt},$$

akkor ez valóban ki is elégíti az egyenletet. (Más megoldás nincs is!)

**2508.** Az egyenlet mindkét oldalára az $a\mathcal{E} - b\mathcal{C}$ operátort alkalmazzuk. A (2.5.4) formula alapján

$$\varphi(z) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(z) - \frac{b}{a^2 - b^2} \frac{1}{\pi i} \oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Ennek a függvénynek az egyenletbe való behelyettesítése révén meggyőződhetünk arról, hogy ez valóban megoldás.

**2509.** Az $(\mathcal{E} - \lambda \mathcal{C})\, \varphi = 0$ egyenlet mindkét oldalára alkalmazzuk az $(\mathcal{E} + \lambda\, \mathcal{C})$ lineáris operátort. A Poincaré–Bertrand-formula értelmében azt kapjuk, hogy nem-triviális megoldás akkor és csak akkor van, ha $\lambda = \pm 1$. Bármely, $l$ által határolt tartományban és azon kívül analitikus függvény egyenletünk megoldását szolgáltatja.

**2510.**

$$\varphi(z) = -\frac{1}{\pi^2} \oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

**2511.** Az $a\,\mathcal{E} - b\,\mathcal{C}$ lineáris operátor alkalmazásával egyenletünket az

$$(a^2 - b^2)\, \varphi + (a\,\mathcal{E} - b\,\mathcal{C})\, \mathcal{K}\, \varphi = (a\,\mathcal{E} - b\,\mathcal{C})\, f = F$$

Fredholm-típusú integrálegyenletre vezetjük vissza.

**2601.** Körvezetőn áthaladó $I$ intenzitású áram által létesített mágneses tér $z$ irányú komponense:

$$H(z) = \frac{r^2}{2} \frac{I}{\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}^{\,3}},$$

ahol $r$ jelenti a körvezető sugarát. A választott koordináta-rendszer $z$ tengelye áthalad a körvezető középpontján és merőleges annak síkjára. Az előbbi formulában szereplő $H(z)$ a mágneses tér $z$ irányú komponensét adja a $z$ tengely $z$ koordinátájú pontjában. $\zeta$ jelenti a kör középpontjának a koordináta-rendszer origójától való távolságát. Ha tekercsről van szó, melynek menetsűrűsége $n(\zeta)$ (azaz a hosszegységre eső menetek száma), akkor

$$H(z) = \frac{I r^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n(\zeta)\, d\zeta}{\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}^{\,3}}.$$

$$x = \frac{z}{r}, \quad y = \frac{\zeta}{r}, \quad \frac{2H(z)}{I} = \frac{2H(r\,x)}{I} = f(x), \quad n(\zeta) = n(ry) = \varphi(y)$$

helyettesítés bevezetése után az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)\, dy}{\sqrt{1 + (x - y)^2}^{\,3}} = f(x) \qquad (*)$$

első fajú integrálegyenletre jutunk. Ha figyelembe vesszük az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iut}\,dt}{\sqrt{1+t^2}^{\,3}}\,dt=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,|u|\,H_1^{(1)}(i\,|u|)$$

ismert formulát, ahol $H_1^{(1)}(u)$ jelenti az első HANKEL-féle függvényt, úgy a (*) alatti integrálegyenlet úgy oldható meg, hogy képezzük mindkét oldalának FOURIER-transzformáltját. A konvolúció-tétel és az inverz FOURIER-transzformáció képlete értelmében:

$$\varphi(y)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(u)\,e^{-iuy}}{|u|\,H_1^{(1)}(i\,|u|)}\,du,$$

$\Phi(u)$ az $f(x)$ FOURIER-transzformáltját jelenti. A megoldó képlet persze akkor érvényes, ha

$$\frac{\Phi(u)}{|u|\,H_1^{(1)}(i\,|u|)}\in L^2(-\infty,+\infty).$$

**2602.** A FOURIER-transzformáció konvolúció-tétele és a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2t^2}\,e^{iut}\,dt=\frac{1}{h\sqrt{2}}\,e^{-\frac{u^2}{4h^2}}$$

formulából az adódik, hogy

$$\varphi(y)=\frac{h}{\pi\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-iuy}\,e^{\frac{u^2}{4h^2}}\,\Phi(u)\,du,$$

feltéve, hogy

$$e^{\frac{u^2}{4h^2}}\,\Phi(u)\in L^2(-\infty,+\infty).$$

$\Phi(u)$ jelenti $f(x)$ FOURIER-transzformáltját.

**2603.**

$$\varphi(y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(-u)}{\varkappa(-u)}\,e^{-iuy}\,du,$$

ha $\dfrac{\Phi(u)}{\varkappa(u)}\in L^2(-\infty,+\infty)$. $\varkappa(u)$ a $K(t)$, $\Phi(u)$ az $f(x)$ FOURIER-transzformáltját jelenti.

**2604.** Az egyenlet mindkét oldalát $\ln\left|\dfrac{z^2-x^2}{x^2}\right|$-tel megszorozva, integráljunk $x$ szerint 0-tól $\infty$-ig. Utána cseréljük fel az integrálok sorrendjét (igazoljuk, hogy ez a lépés jogos!). A belső integrál:

$$\int\limits_0^{\infty}\ln\left|\frac{z^2-x^2}{x^2}\right|\ln\left|\frac{y^2-x^2}{x^2}\right|dx=\begin{cases}\pi^2 z, & \text{ha } z<y\\ \pi^2 y, & \text{ha } z>y.\end{cases}$$

Ezt differenciáljuk $y$ szerint, így a

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}\right] \ln\left|\frac{z^2-x^2}{x^2}\right| dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } y > z, \\ \pi^2 & \text{ha } y < z \end{cases}$$

képlethez jutunk. Ennek révén a megoldás:

$$\varphi(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}\right] f(x)\, dx.$$

**2606.** Lehetséges, például akkor, ha a $H$ magfüggvényhez található olyan $c > 0$ szám, hogy

$$\int_x^\infty H(t)\, dt < c\, H(x) \qquad x \geqq 0$$

legyen. Ekkor ti.

$$x < \frac{1}{\lambda(0)}\int_0^\infty H(|x-y|)\, y\, dy,$$

azaz

$$x < L(x),$$

és $H$-ról tett feltevés alapján

$$L(x+c) \leqq x + c.$$

Megismételjük az előbbi gondolatmenetet $x$ és $x+c$ függvényekkel $e^{\alpha x}$ és $e^{\alpha x} - 1$ helyett.

**2607.** Mivel

$$\int_0^\infty H(t)\, e^{\alpha t}\, dt = \int_0^\infty \left(\int_t^\infty \frac{e^{-\xi}}{\xi}\, d\xi\right) e^{\alpha t}\, dt = \int_0^\infty \left(\int_0^\xi e^{\alpha t}\, dt\right) \frac{e^{-\xi}}{\xi}\, d\xi = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty (e^{\alpha\xi} - 1)\frac{e^{-\xi}}{\xi}\, d\xi$$

integrál konvergens, ha $\alpha < 1$, és divergens, ha $\alpha = 1$, ezért $A = 1$ értékkel a 2605. feladat feltételei ki vannak elégítve, vagyis az ott követett módszer alkalmazható. Esetünkben

$$p(\alpha) = \frac{1}{\lambda(\alpha)} = 2\int_0^\infty H(t)\, \mathrm{ch}\, \alpha\, t\, dt = 2\int_0^\infty \mathrm{ch}\, \alpha\, t \int_t^\infty \frac{e^{-\xi}}{\xi}\, d\xi\, dt =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \frac{e^{-(1-\alpha)t} - e^{-(1+\alpha)t}}{t}\, dt = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Mivel $\dfrac{1}{\lambda(0)} = 2$, azért a $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ nyílt számköz minden száma az egyenlet sajátértéke.

**2701.** A differenciálegyenlet szóban forgó megoldását

$$T(x, y; t) = T_0(x, y; t) + \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t \left[\int_{(l)} \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(n, r)\, d\sigma\right] d\tau$$

alakban keressük. Ezáltal (2.7.1) egy partikuláris megoldását adtuk meg, hátra van a $\mu(\sigma, \tau)$ függvény alkalmas megválasztása úgy, hogy a (2.7.2) peremfeltételek teljesüljenek. Ha a (2.7.4) képletet alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mu(s, t) - \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t \left[\int_{(l)} \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\varkappa, r)\, d\sigma\right] d\tau = f(s, t) - T_0(s, t).$$

**2702.** A gondolatmenet ugyanaz, mint a **2701.** alatti feladat megoldásánál, csakhogy most a (2.7.5) képletet kell alkalmazni. A keresett integrálegyenlet:

$$\mu(s, t) + \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t \left[\int_{(l)} \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(n, r)\, d\sigma\right] d\tau.$$

**2703.** A megoldást

$$T(x, y; t) = T_0(x, y; t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \left[\int_{(l)} \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma\right] d\tau$$

alakban keressük. (2.7.7) és (2.7.8) formulák alapján $\varrho$-ra a következő integrálegyenletre jutunk:

$$\pm \varrho(s, t) - \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_0^t \left[\int_{(l)} \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(n, r)\, d\sigma\right] d\tau +$$

$$+ \frac{h(s)}{2\pi}\int_0^t \left[\int_{(l)} \frac{\varrho(\sigma, \tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma\right] d\tau = f(s, t) - \frac{\partial T_0}{\partial n} - h(s)\, T_0.$$

A + vagy − jel aszerint veendő, hogy a belső vagy a külső tartományról van szó.

**2704.** Vizsgáljuk a kissé általánosabb

$$\mu(s, t) - \frac{\lambda}{2\pi a^2}\int_0^t \left[\int_{(l)} \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(n, r)\, d\sigma\right] d\tau = f(s, t) - T_0(s, t) = g(s, t)$$

integrálegyenletet. Vezessük be a $\sigma$ változó helyett azt az $\alpha$ változót, melyre

$$\frac{\cos(r, n)}{r}\, d\sigma = d\alpha.$$

Ezáltal integrálegyenletünk a következő alakúvá válik:

$$\mu(s,t) - \frac{\lambda}{4\pi a^2}\int_0^t\left[\int_{(l)} \frac{\mu(\sigma,\tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r^2\, d\alpha\right] d\tau = g(s,t).$$

Legyen

$$\mu(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(s,t)\,\lambda^n.$$

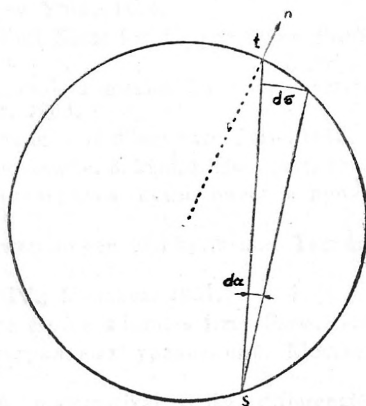
Ezt az egyenletbe helyettesítve és $\lambda$ megfelelő hatványainak együtthatóit összehasonlítva az adódik, hogy

$$\mu_0(s,t) = g(s,t),$$

$$\mu_n(s,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t\left[\int_{(l)} \frac{\mu_{n-1}(\sigma,\tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r^2\, d\alpha\right] d\tau. \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Legyen $|g(s,t)| = |\mu_0|(s,t)| \leqq A_0$. Tegyük fel, hogy $|\mu_{n-1}(s,t)| \leqq A_{n-1}$, akkor

$$|\mu_n(s,t)| \leqq \frac{A_{n-1}}{4\pi a^2}\int_{(l)}\left[\int_0^t \frac{r^2}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau\right] d\alpha.$$



9. ábra

Az

$$\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)} = z$$

helyettesítéssel az

$$\frac{1}{4a^2}\int_0^t \frac{r^2}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau = e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}$$

azonosság könnyen verifikálható. E reláció alapján

$$|\mu_n(s,t)| \leqq \frac{A_{n-1}}{\pi}\int_{(l)} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} d\alpha < \frac{A_{n-1}}{\pi}\int d\alpha = A_{n-1}\frac{w(s)}{\pi} \leqq A_{n-1}.$$

$w(s)$ jelenti $l$ látószögét az $s$ pontból és nyilván $w(s) \leqq \pi$. Legyen

$$q = \max_{0 \leqq t \leqq t_0} \frac{1}{\pi}\int_{(l)} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} d\alpha,$$

akkor bármely $t_0$-ra az előbbi egyenlőtlenség folytán az adódott, hogy

$$A_n \leqq q\, A_{n-1},$$

amiből

$$A_n < A_0\, q^n$$

következik. $\mu(s, t)$-re vonatkozó sor tehát az

$$A_0 \sum_{n=0}^{\infty} q^n \lambda^n = A_0 \frac{1}{1 - q\lambda} \qquad 0 \leqq t \leqq t_0$$

numerikus sorral majorizálható, mely azt mutatja, hogy a szukcesszív approximáció $|\lambda| \leqq 1$-re konvergens.

## FELHASZNÁLT ÉS AJÁNLOTT IRODALOM

1. H. BÜCKNER: Die praktische Behandlung von Integralgleichungen. Berlin. 1952.
2. R. COURANT–D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik. I., Berlin. 1924.
3. G. DOETSCH: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin. 1937.
4. N. M. GUNTER–R. O. KUZMIN: Felsőbb matematikai példatár. III. kötet. Budapest. 1952.
5. É. GOUSAT: Cours d'analyse mathématique. III., Paris. 1942.
6. G. HAMEL: Integralgleichungen. Berlin. 1937.
7. E. HELLINGER–O. TOEPLITZ: Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. Leipzig. 1928.
8. D. HILBERT: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig. 1924.
9. G. HOHEISEL: Integralgleichungen. Berlin. 1936.
10. E. HOPF: Mathematical problems of radiative equilibrium. Cambridge. 1934.
11. W. D. KUPRADZE: Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen. Berlin. 1956.
12. L. V. KANTOROVICS–V. I. KRÜLOV: A felsőbb analízis közelítő módszerei. Budapest. 1953.
13. G. KOWALEWSKI: Integralgleichungen. Berlin. 1930.
14. T. LALASCO. Théorie des équations integrales. Paris. 1912.
15. W. V. LOVITT: Linear integral equations. New York. 1924.
16. W. MAGNUS–F. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik. Berlin. 1948.
17. SZ. G. MIHLIN: Integrálegyenletek és alkalmazásuk a mechanika, a matematikai fizika és a technika egyes problémáira. Budapest. 1953.
18. F. RIESZ: Les système d'équations linéaires a une infinité d'inconnes. Paris. 1913.
19. F. RIESZ–B. SZ. NAGY: Leçons d'analyse fonctionelle. 3. kiadás. Budapest. 1953.
20. I. M. RIZSIK–I. SZ. GRADSTEIN: Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Moszkva. 1951.
21. W. SCHMEIDLER: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. Leipzig. 1955.
22. V. I. SZMIRNOV: Курс высщей математики. IV., Moszkva. 1951.
23. M. I. SOULA: L'équation integrale de première éspèce a limites fixes. Paris. 1936.
24. I. G. PETROVSZKIJ: Лекции по теории интегральных уравненний. Moszkva. 1951.
25. A. N. TYIHONOV–A. A. SZAMARSZKIJ: A matematikai fizika differenciálegyenletei. Budapest. 1956.
26. G. VIVANTI–F. SCHWANK: Elemente der Theorie der linearen Integralgleichungen. Hannover. 1929.
27. V. VOLTERRA: Leçons sur les équations intégrales. Paris. 1913.
28. V. VOLTERRA: Théorie générale des fonctionnelles. Paris. 1936.
29. V. VOLTERRA–J. PÉRES: Leçons sur la composition et les fonctions permutables. Paris. 1924.
30. E. T. WHITTAKER–G. N. WATSON: A course of modern analysis. Cambridge. 1946.

Tankönyvkiadó Vállalat
A kiadásért felelős: Vágvölgyi Tibor igazgató
Felelős szerkesztő: Ambrus Ferenc
Műszaki vezető: Gonda Pál
Műszaki szerkesztő: Simányi Hugó
A kézirat nyomdába érkezett: 1965. december — Megjelent: 1966. július
Példányszám: 1000 — Terjedelem: 16,25 (A/5) ív
Készült: az 1957. évi első kiadás matricájának felhasználásával,
íves magasnyomással, az MSZ 5601—59 és az MSZ 5602—55 szabvány szerint
Raktári szám: 44 331/III.
66.47 Egyetemi Nyomda, Budapest